

П.М. Попов

**Принципы  
построения систем  
автоматического  
управления  
применительно  
к управлению  
летательными  
аппаратами**

Ульяновск 2000

**МИНИСТЕРСТВО  
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Ульяновский государственный технический университет**

**П.М.Попов**

**ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ  
СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО  
К УПРАВЛЕНИЮ  
ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ**

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию  
в области «Авиации, ракетостроения и космоса»  
в качестве учебного пособия для студентов направления 551000  
и специальности 13.01.00 «Самолето- и вертолетостроение»

**Ульяновск 2000**

УДК 658-512.011-56.005:621(075)

ББК 32.965я7

П60

Рецензенты: канд. техн. наук, **ДОЦЕНТ В.Г. Тодуров**,  
канд. техн. наук, доцент **С. Д. Лобанов**

Одобрено редакционно-издательским советом Ульяновского  
государственного технического университета

**Попов П.М.**

**П60** Принципы построения систем автоматического управления  
применительно к управлению летательными аппаратами: Учебное  
пособие.

Ульяновск: УлГТУ, 2000. 52 с.  
ISBN 5-89146-135-8

Рассмотрены основные приемы: построения и описания элементов САУ  
(отдельных звеньев), построения графиков амплитудно-частотных, фазовых,  
логарифмических и др. характеристик для определения устойчивости систем  
автоматического управления. Приводятся контрольные примеры описания  
элементов САУ замкнутых и разомкнутых систем автоматического управления и  
т.п.

Пособие разработано в соответствии с программой курса «Основы  
автоматического управления и АСУ комплексами средств ЛА», предназначено для  
студентов дневной и вечерней форм обучения при выполнении расчетно-  
графической работы.

УДК 658-512. 011 - 56. 005 : 621 (075)  
ББК 32 .965 я7

Учебное издание  
**ПОПОВ Петр Михайлович**  
Принципы построения систем автоматического управления  
применительно к управлению летательными аппаратами

Учебное пособие  
Корректор Ю. Кретьева  
Изд. лиц. 020640 от 22.10.97. Подписано в печать 28. 02. 00.  
Формат 60х84/16. Бумага писчая. Усл.печ.л. 3,02. Уч.-изд. л. 3,00.  
Тираж 100 экз. Заказ 336.  
Ульяновский государственный технический университет,  
432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.  
Типография УлГТУ, 432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.

ISBN 5-89146-135-8

© П.М.Попов, 2000  
© Оформление. УлГТУ, 2000

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	4
1.1 Общие понятия .....	4
1.2 Воздействия и сигналы .....	6
1.3 Элементы и звенья систем автоматического управления .....	6
1.4 Принципы построения систем автоматического управления и их классификация .....	8
1.5 Классификация элементов автоматических систем .....	10
2. МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	И
2.1 Переходная, импульсная, частотная и передаточная функции и связи между ними .....	16
2.2 Правила составления структурных схем САУ .....	16
2.3 Основные формулы для преобразования структурных схем .....	22
2.4 Определение передаточных функций разомкнутых и замкнутых систем по задающему воздействию и возмущению .....	23
2.5 Методика составления математических моделей динамических систем .....	27
3. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ .....	31
3.1 Построение логарифмических частотных характеристик разомкнутых систем .....	33
3.2 Логарифмические частотные характеристики элементарных звеньев .....	33
3.3 Методика построения логарифмических частотных характеристик разомкнутой одноконтурной системы .....	43
3.4 Построение ЛЧХ комбинированных систем .....	46
4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ, НЕКОТОРЫЕ ПОЯСНЕНИЯ .....	49
4.1 Состав расчетно-графической работы (РГР) .....	50
4.2 Контрольные вопросы .....	51
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	52

## ВВЕДЕНИЕ

При современном уровне развития науки и техники дальнейший научно-технический прогресс возможен лишь при широком внедрении различных систем автоматизации как на базе автоматического управления, так и автоматизированного, основанного на использовании широкого спектра сложных комплексов систем автоматического (без вмешательства в управление человека) и систем автоматизированного управления (с участием в управлении человека и ЭВМ) сложными большими производствами, объектами, летательными аппаратами и т.д.

Развитие современной техники сопровождается все большим усложнением самих управляемых объектов, а также повышением требований к системам автоматического управления.

Поэтому студентам - самолетостроителям необходимо иметь представление и сведения, а также знать некоторые методы инженерно-теоретической фундаментальной дисциплины по автоматическому управлению, особенно в таких ее частях, как оптимальное управление, теория адаптивных систем, теория устойчивости, цифровые системы управления применительно, главным образом, к управлению летательными аппаратами.

Целью настоящей работы является на конкретных примерах решения задач анализа систем автоматического управления (САУ) (звеньев систем автоматического управления) показать порядок выполнения расчетно-графической работы по дисциплине "Основы автоматического управления и АСУ комплексами средств летательных аппаратов".

В работе в сжатой форме приводятся примеры расчета различных характеристик САУ, предложены различные виды графиков амплитудно-частотных характеристик, логарифмических, фазовых, амплитудно-фазовых и других характеристик и краткие правила их построения. Для более полного самостоятельного изучения "Теории автоматического управления" любознательным студентам приводится достаточно обширная библиография в конце настоящей работы.

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 1.1 Общие понятия

**Объект управления** (объект регулирования) - это устройство, требуемый режим работы которого должен поддерживаться извне специально организованными управляющими воздействиями.

**Управление** - это формирование управляющих воздействий, обеспечивающих требуемый режим работы объекта управления.

**Регулирование** - частный вид управления, когда задачей является обеспечение постоянства какой-либо выходной величины.

**Автоматическое управление** - управление, осуществляемое без непосредственного участия человека.

**Автоматизированное управление** - управление, осуществляемое непосредственно человеком через программируемые устройства, называемые электронно-вычислительными машинами (ЭВМ).

**Управляющее устройство** (автоматическое управляющее устройство) - (УУ) - устройство, осуществляющее воздействие на объект управления с целью обеспечения требуемого режима работы.

**Автоматическая система** (АС) (система автоматического управления - САУ, система автоматического регулирования - САР) - совокупность объекта управления и управляющего устройства, взаимодействующих между собой [1].

**Автоматизированная система управления** (АСУ) - совокупность объекта управления и машинно-программного комплекса, обеспечивающего обмен правил между данными и требований к средствам, обеспечивающих взаимоувязку компонентов и элементов в данной автоматизированной системе (или просто системе управления).

**Система автоматического регулирования** - представляет собой совокупность объекта управления (ОУ) и управляющего устройства (УУ) (регулятора).

Объектом управления может быть физическое тело, устройство, система, технологический или рабочий процесс, выходные переменные которого, называемые в данном случае управляемыми, подлежат управлению. При этом под управляющим устройством (УУ) подразумевается устройство, обеспечивающее процесс управления, то есть целенаправленное воздействие, приводящее к желаемому изменению управляемых переменных. Для осуществления процесса управления объект управления должен иметь управляющие органы.

Например, объект управления - самолет, **управляемая переменная** - угол курса, **управляющий орган** - руль направления, **управляющее устройство** - автопилот.

**Регулятор** должен вырабатывать **управляющие** воздействия в зависимости от состояния объекта управления, информация о котором поступает в виде выходных сигналов соответствующих датчиков.

**Управление** - более общий термин, чем регулирование, стабилизация, слежение, наведение. Поэтому часто его используют применительно к системам, которые могут решать любые из предложенных задач или их совокупность, а также выполнять другие дополнительные функции, такие, например, как оптимизация процессов по заданным критериям качества. Во всякой автоматической системе имеется **управляющее устройство**.

## 1.2. Воздействия и сигналы

**Внешнее воздействие** - воздействие внешней среды на автоматическую систему.

**Внутреннее воздействие** - воздействие одной части автоматической системы на другую.

**Управляющее воздействие** ( $U, u$ ) - воздействие управляющего устройства на объект управления.

**Контрольное воздействие** - воздействие объекта управления на управляющее устройство.

**Задающее воздействие** ( $X, x$ ) - величина, характеризующая планируемое воздействие на входе автоматической системы.

**Выходные** (управляемые, регулируемые) **координаты** ( $Y, y$ ) - величины, характеризующие состояние объекта управления.

**Возмущающие воздействия** (помехи) -  $F, f; N, n$  - воздействия, возникающие в результате взаимодействия автоматической системы с внешней средой и вызывающие непланируемые изменения выходных координат.

**Предписанное значение выходной координаты** ( $Y_{np}, U_{np}$ ) - значение величины, определяемое требуемым режимом работы.

**Действительное значение выходной координаты** - значение выходной величины, соответствующее фактическому состоянию объекта управления.

**Ошибка управления** ( $Z, z$ ) - разность между предписанными и действительными значениями выходной координаты автоматической системы ( $Z = Y_{np} - Y$ ).

## 1.3. Элементы и звенья систем автоматического управления

**Функциональный элемент** (функциональный блок) - конструктивно обособленная часть автоматической системы, выполняющая определенную функцию. **Функциональная схема**, например, управляющего устройства состоит из следующих основных элементов:

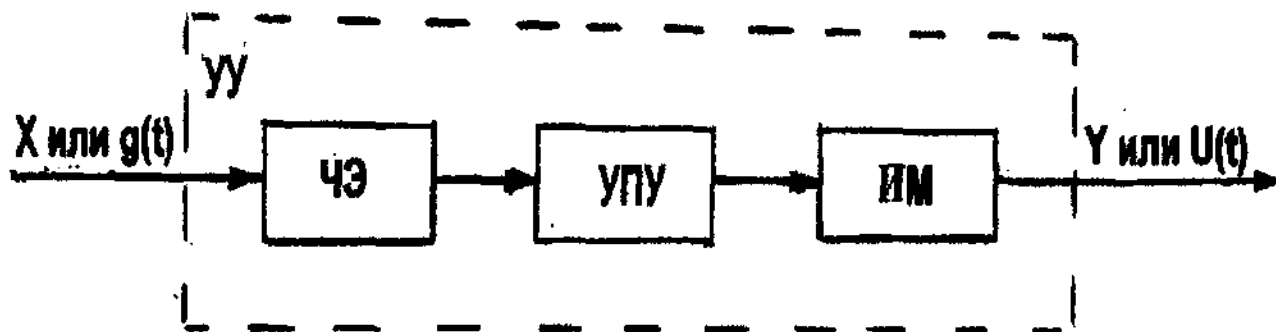


Рис. 1.1. Упрощающее устройство САУ (фрагмент)

чувствительного элемента (ЧЭ) или датчика, служащего для измерения задающего воздействия  $g(t)$  или  $X$ , усилительно-преобразовательного устройства (УПУ), в котором формируется алгоритм управления, то есть производится сравнение информации о действительном и желаемом состояниях объекта и выполняются необходимые математические и логические операции по выработке управляющего сигнала; исполнительного механизма (ИМ), приводящего в движение управляющий орган, оказывающий управляющее воздействие  $u(t)$  или  $Y$  непосредственно на объект. Таким образом, задачей управляющего устройства является выработка управляющих воздействий, прикладываемых к входам объекта. При этом качество управления будет оцениваться близостью действительного значения переменных состояния объекта к желаемым траекториям движения.

**Воспринимающий элемент (блок)** - функциональный элемент автоматического управляющего устройства, принимающий внешние воздействия и (или) контрольные воздействия.

**Измерительный элемент (блок)** - функциональный элемент автоматического управляющего устройства, предназначенный для определения величин воздействий, поступающих на автоматическую систему, а также ошибки управления.

**Усилительно - преобразовательный элемент (блок)** - функциональный элемент автоматического управляющего устройства, воспринимающий сигналы измерительного элемента, усиливающий их и преобразовывающий к виду, удобному для передачи на исполнительный элемент.

**Исполнительный элемент (блок)** - функциональный элемент автоматического управляющего устройства, осуществляющий выработку управляющих воздействий.

**Корректирующий элемент** - устройство, включаемое в САУ для повышения устойчивости и улучшения динамических свойств.

**Динамическое звено** - элементарное звено, осуществляющее изменение функциональной зависимости воздействия, подаваемого на его вход, от времени.

**Динамической системой** (греч. *dynamis* - сила) называют совокупность взаимодействующих устройств, в которых протекающие процессы определяются начальными состояниями этих устройств, взаимосвязями между ними и приложенными к системе воздействиями.

**Состояние динамической системы** во времени и пространстве характеризуется переменными, принимающими в каждый момент времени определенные числовые значения.

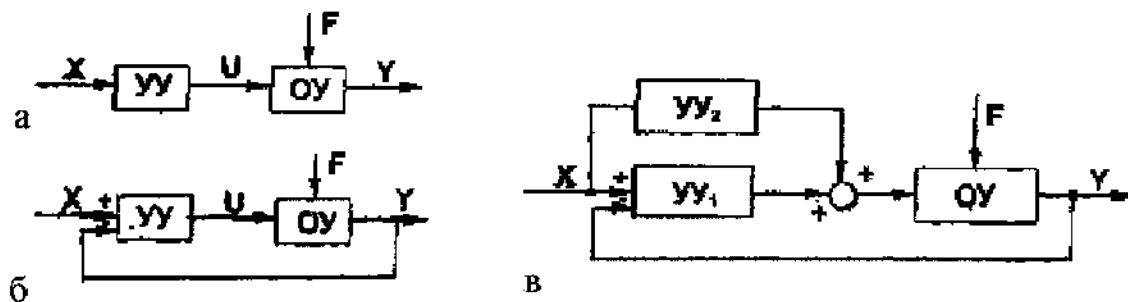
**Арифметическое звено** - элементарное звено, осуществляющее арифметическую операцию по отношению к воздействиям, поступающим на его входы.



**Логическое звено** - элементарное звено, осуществляющее логическую операцию ( $\text{И} \rightarrow \text{ИЛИ} \rightarrow \text{НЕ}$ ) по отношению к воздействиям, поступающим на его входы.

#### 1.4. Принципы построения систем автоматического управления и их классификация

По принципу формирования управляющего воздействия, поступающего на управляющий орган объекта управления, все САУ делятся на системы:



*а - управление по разомкнутому циклу;*

*б - управление по замкнутому циклу;*

*в - САУ с комбинированным управлением*

**Рис. 1.2.** Деление САУ по принципу формирования управляющего воздействия

Структурная схема (рис. 1.2 а) системы автоматического управления **разомкнутого** типа, особенность которой состоит в том, что при выработке управляющего воздействия  $U(t)$  используется только информация о цели управления, а действительное значение выходной управляемой переменной  $Y$  не контролируется. В такой системе реализуется принцип управления “по возмущению”, то есть по внешнему воздействию -  $F$  или  $N$ .

Управление может формулироваться по заранее рассчитанной программе  $g(t)$  или на основании измерения и последующей компенсации управляющим устройством возмущающего воздействия  $f(t)$ , приложенного к объекту.

**САУ разомкнутого** типа способны удовлетворительно функционировать только при постоянстве характеристик объекта управления и в условиях низкого уровня помех, вызываемых влиянием окружающей среды.

**САУ замкнутого** (рис. 1.2 б) типа работают по принципу **отрицательной обратной связи**. В них реализуются измерение и контроль отклонения управляемой переменной  $Y$  от задающего воздействия  $X$ . Цель управления в таких системах состоит в устранении ошибки управления:

$$[e(t) = g(t) - x(t)] \text{ или } Z = Y_{np} - Y.$$

Основные признаки **классификации** систем автоматического управления по назначению:

**системы автоматической стабилизации**, когда задающее воздействие  $X = const$ , **цель управления** - поддерживать постоянное значение управляемой переменной;

**системы программного управления**, когда задающее воздействие  $x$  - известная, заранее заданная функция времени (программа), **цель управления** - изменять управляемую переменную  $Y$  по заранее заданному закону;

**следающие системы**, когда задающее воздействие  $x$  заранее неизвестная функция времени, **цель управления** - изменять управляемую переменную в соответствии с изменением  $x$ .

**По принципу управления** (рис. 1.2 а, б, в).

**По характеру используемых для управления сигналов:**

**Непрерывные;**

**дискретные** (импульсные, релейные и релейно-импульсные).

**По характеру используемой информации об условиях работы:**

**Системы с жестким законом управления и структурой;**

**системы с изменяемыми** структурой и законом управления, к которым относятся:

- а) системы автоматической настройки;
- б) самообучающиеся системы;
- в) самоорганизующиеся системы.

**По характеру математических отношений:**

**линейные** (для которых справедлив принцип суперпозиции);

**нелинейные.**

Как линейные, так и нелинейные САУ могут быть подразделены на **непрерывные, дискретные и дискретно-непрерывные; на стационарные** (с постоянными параметрами) **и нестационарные** (с переменными параметрами).

Стационарные и нестационарные системы могут быть с **сосредоточенными и распределенными параметрами.**

**По количеству выходных координат объекта управления:**

**одномерные;**

**многомерные.**

Последние делятся на системы **связанного и несвязанного управления**. В системах связанного управления отдельные управляющие устройства связаны друг с другом внешними связями.

Входящая в состав многомерной системы отдельная система управления называется автономной, если управляемая ею выходная величина не зависит от значений остальных управляемых величин.

### 1.5. Классификация элементов автоматических систем

Основные признаки классификации элементов систем автоматического управления.

**По функциональному назначению: измерительные; усилительно-преобразовательные; исполнительные; корректирующие.**

**Функциональная схема** является условным изображением САУ и отражает состав и порядок взаимодействия входящих в нее элементов. Каждый элемент на функциональной схеме изображается прямоугольником с указанием выполняемой им функции (кроме сравнивающего и суммирующего, обозначаемых кружками, разделенными на секторы). Элементы на схеме соединяются в той последовательности, в какой они работают в реальной системе. Одновременное использование принципов управления "по возмущению" и "по отклонению" приводит к **комбинированной** системе автоматического управления (рис. 1.2 в), которая имеет разомкнутый контур форсирования компенсации возмущающего воздействия и замкнутый контур системы с обратной связью для устранения возникающих ошибок управления.

**По виду энергии, используемой для работы:**

электрические; механические; гидравлические; пневматические; комбинированные.

**По наличию или отсутствию** вспомогательного источника энергии: активные и пассивные.

**По характеру математических соотношений.**

**По поведению в статическом**

**режиме: статические и астатические.**

В качестве примера системы автоматического управления рассмотрим функциональную схему канала управления движением самолета по курсу (рис. 1.3), состоящую из объекта управления - самолета 1, чувствительного элемента - гироскопического датчика курса 2, усилительно - преобразовательного устройства 3, исполнительного механизма - рулевой машины 4 и управляющего органа - руля направления 5. Так как гироскоп сохраняет неизменное направление в пространстве, то при отклонении самолета от задан-

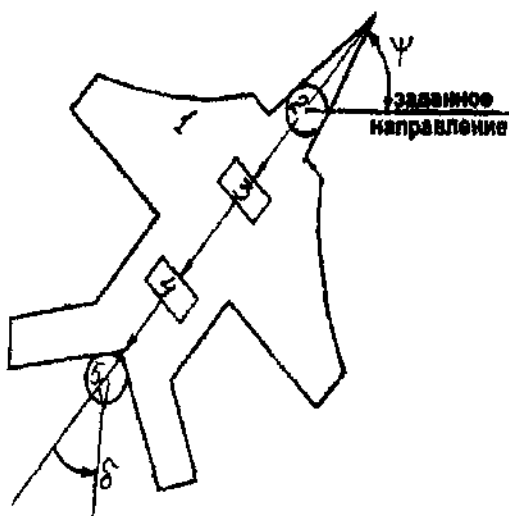


Рис. 1.3. Функциональная схема канала управления самолета

ного направления полета между осью гироскопа и продольной осью самолета возникает рассогласование. В результате на усилительно-преобразовательное устройство подается электрический сигнал, пропорциональный углу  $\Psi$ , который приводит в движение рулевую машину. Руль направления отклоняется на угол  $\delta$  и самолет возвращается к заданному направлению полета.

## 2. МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Уравнения установившихся режимов процесса управления называются **уравнениями статики**, уравнения переходных режимов процесса управления - **уравнениями динамики**.

Уравнения динамики являются дифференциальными или интегродифференциальными. Для систем с распределенными параметрами они получаются в частных производных.

Для составления уравнений динамики система разбивается на элементы (звенья), и для каждого из них составляется соответствующее уравнение на основании того физического закона, который определяет процесс, протекающий в данном элементе. Совокупность уравнений динамики, составленных для всех элементов системы, определяет процесс автоматического управления. Одновременно производится линеаризация этих уравнений.

**Линеаризацией** называется замена реальных нелинейных уравнений статических характеристик элементов (автоматических систем) близкими к ним линейными уравнениями.

Существуют следующие методы линеаризации:

1. Метод малых отклонений (для аналитических статических характеристик).

Если функция  $y = \varphi(x)$  (рис. 2.1 а) разлагается в ряд Тейлора, то

$$y = y_0 + \frac{dy}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \Delta x^2 + \dots$$

где  $y_0$  — начальное значение выходной величины, соответствующее начальному значению входной величины  $x_0$ ;

$\frac{d^k y}{dx^k}$  — значения производных выходной величины, взятых для точки  $A(x_0, y_0)$ .

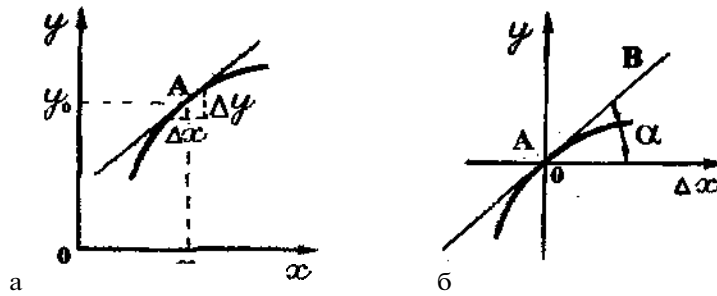


Рис. 2.1. Линеаризация по методу малых отклонений

Для малых отклонений  $\Delta x$ :

$$y \approx y_0 + \frac{dy}{dx} \Delta x$$

или 
$$\Delta y = y - y_0 = \frac{dy}{dx} \Delta x = k \cdot \Delta x, \quad (2.1)$$

где  $k = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$  при  $x = x_0$

При этом нелинейная функция  $y = \varphi(x)$  заменяется линейным уравнением (2.1) в приращениях (прямая АВ на рис. 2.1 б).

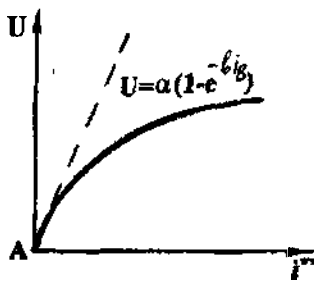


Рис. 2.2. Статическая характеристика генератора постоянного тока

**Пример 2.1.** Линеаризовать статическую характеристику  $U = \varphi(i_B)$  (рис. 2.2) генератора постоянного тока в точке А(0;0), если  $U = a(1 - e^{-bi_B})$ , где  $a$  и  $b$  - постоянные коэффициенты.

**Решение.** Линеаризованная характеристика в приращениях будет иметь вид:

$$\Delta U = \left. \frac{dU}{di_B} \right|_{i_B=0} \cdot \Delta i_B = a \cdot b \cdot \Delta i_B.$$

Из этого же метода вытекает возможность непосредственной подстановки переменных в исходное уравнение.

**Пример 2.2.** Линеаризовать уравнение статической характеристики множительного элемента (рис. 2.3 а)  $y = x_1 \cdot x_2$  относительно точки, в которой  $y_0 = x_{01} x_{02}$ .

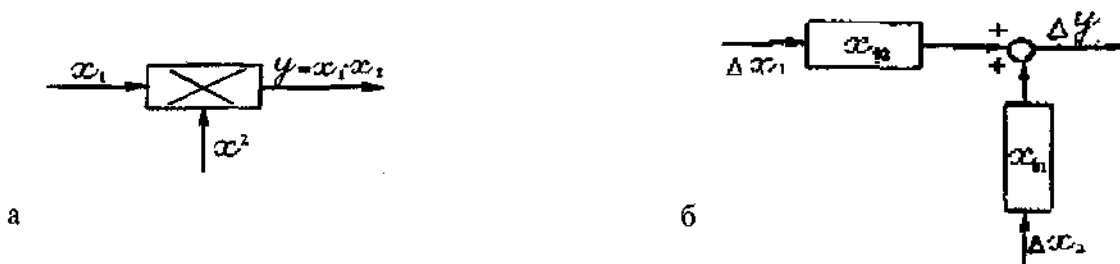


Рис. 2.3. Схема нелинейного (а) и линеаризованного (б) множительных элементов

**Решение.** Рассматриваем небольшие отклонения переменных  $x_1$  и  $x_2$  от своих номинальных значений  $x_{01}$  и  $x_{02}$ . Тогда

$$y_0 + \Delta y = (x_{01} + \Delta x_1)(x_{02} + \Delta x_2) = x_{01} \cdot x_{02} + x_{01} \cdot \Delta x_2 + x_{02} \cdot \Delta x_1 + \Delta x_1 \cdot \Delta x_2. \quad (2.2)$$

Вычитая из выражения (2.2) значение  $y_0$  и пренебрегая малыми высшего порядка, получим:

$$\Delta y = x_{01} \cdot \Delta x_2 + x_{02} \cdot \Delta x_1 - K_1 \Delta x_1 + K_2 \Delta x_2,$$

где  $K_1 = x_{02}$ ;  $K_2 = x_{01}$

В результате такого преобразования нелинейный множительный элемент может быть приближенно представлен в виде сумматора и двух линейных звеньев (рис. 2.3 б).

Если выходная величина элемента является функцией нескольких независимых входных воздействий, то при линеаризации следует определять частные производные выходной величины по каждому входному воздействию, а приращение выходной величины находить как сумму частных приращений.

Так, если  $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то (при малых приращениях):

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n,$$

где  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  - приращения входных воздействий;

$\Delta y$  - приращение выходной величины;

$\frac{\partial^i y}{\partial x^i} (i = 1, 2, \dots, n)$  - частные производные.

2. Метод осреднения (для неаналитических статических характеристик) (рис. 2.4).

Точность линеаризации оценивается величиной относительной погрешности:

$$\delta = \frac{\varphi(x) - J_n(x)}{\varphi(x)},$$

где  $J_n(x)$  - уравнение линеаризованной характеристики.

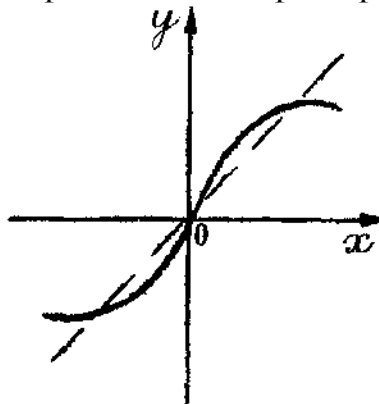


Рис. 2.4. Метод осреднения нелинейной статической характеристики

Величина  $\delta$  должна быть  $\delta < 0,1 \div 0,2$ .

**Пример 2.3.** По данным примера 2.1 определить диапазон допустимых изменений тока  $i_0$ , внутри которого относительная погрешность линеаризации статической характеристики  $\delta \leq 0,1$ .

**Решение.** Из условия:  $\delta = \frac{a(1 - e^{-bi_0}) - a \cdot i_0}{a(1 - e^{-bi_0})} < 0,1$ , разложив выражение  $e^{-bi_0}$  в ряд и ограничившись первыми двумя членами этого ряда, получим:

$$i_0 \leq \frac{0,2}{b}.$$

**Пример 2.4.** Составить уравнение динамики исполнительного электродвигателя системы автоматического управления.

**Решение.** В качестве физического закона, определяющего процесс, протекающий в двигателе, выберем второй закон Ньютона. Тогда

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{д}} - M_{\text{с}}, \quad (2.3)$$

где  $\omega$  - угловая скорость вала двигателя;

$J$  - момент инерции движущихся частей, приведенный к валу;

$M_{\text{д}}$  - вращающий момент двигателя;

$M_{\text{с}}$  - момент сопротивления на валу двигателя.

Момент  $M_{\text{д}}$  является функцией скорости  $\omega$  и управляющего воздействия  $x$ :

$$M_{\text{д}} = M_{\text{д}}(\omega, x).$$

Положим, что момент сопротивления  $M_{\text{с}}$  зависит только от скорости вращения:  $M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(\omega)$ .

С учетом сказанного уравнения (2.3) принимают вид:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{д}}(\omega, x) - M_{\text{с}}(\omega). \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) нелинейно. В соответствии с вышеизложенным методом линеаризации производим линеаризацию уравнения (2.4).

Получим линеаризованное дифференциальное уравнение в таком виде:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{д}0} + \left( \frac{\partial M_{\text{д}}}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \omega=\omega_0}} \Delta x + \left( \frac{\partial M_{\text{с}}}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} \Delta \omega - M_{\text{с}0}, \quad (2.5)$$

где  $M_{\text{д}0}, M_{\text{с}0}, x_0, \omega_0$  - начальные значения переменных;

$\Delta x$  - приращение управляющего воздействия;

$\Delta \omega$  - приращение угловой скорости.

Уравнение статики в этом случае:

$$M_{\text{д}0} - M_{\text{с}0} = 0. \quad (2.6)$$

Учитывая выражение (2.6), приняв за переменные не их абсолютные значения, а приращения и имея в виду, что

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(\omega - \omega_0)}{dt} = \frac{d\Delta\omega}{dt},$$

выражение (2.5) можно записать так:

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} + \left( \frac{\partial M_c}{\partial \omega} - \frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \omega=\omega_0}} \Delta\omega = \left( \frac{\partial M_d}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \omega=\omega_0}} \Delta x. \quad (27)$$

Введя обозначения:

$$T_d = \frac{J}{\left( \frac{\partial M_c}{\partial \omega} - \frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \omega=\omega_0}}}, \quad K_d = \frac{\left( \frac{\partial M_d}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \omega=\omega_0}}}{\left( \frac{\partial M_c}{\partial \omega} - \frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right)_{\substack{x=x_0 \\ \omega=\omega_0}}}$$

получим:  $T_d \frac{d\Delta\omega}{dt} + \Delta\omega = K_d \cdot \Delta x. \quad (2.8)$

Выражение (2.8) является линеаризованным уравнением динамики в приращениях. Если  $M_d = C_1 x - C_2 \omega$ , а  $M_c = \text{const}$ , то  $T_d = \frac{J}{C_2}$  и  $K_d = \frac{C_1}{C_2}$ .

**Пример 2.5.** Составить дифференциальное уравнение следящей системы (рис. 2.5), если уравнения ее отдельных звеньев в приращениях равны:

1. Уравнение сигнала ошибки:  $\Delta z = \Delta \varphi_{\text{вх}} - \Delta \varphi_{\text{вых}}, \quad (2.9)$

2. Уравнение сельсинного измерительного элемента (СИЭ)

$$\Delta U_{\text{СИЭ}} = K_{\text{СИЭ}} \Delta z; \quad (2.10)$$

3. Уравнение электронного усилителя (ЭУ)

$$\Delta U_{\text{ЭУ}} = K_{\text{ЭУ}} \Delta U_{\text{СИЭ}}; \quad (2.11)$$

4. Уравнение электромашинного усилителя (ЭМУ)

$$T_{\text{ЭМУ}} \frac{d\Delta U_{\text{ЭМУ}}}{dt} + \Delta U_{\text{ЭМУ}} = K_{\text{ЭМУ}} \Delta U_{\text{ЭУ}}; \quad (2.12)$$

5. Уравнение исполнительного двигателя (ИД)

$$T_d \frac{d^2 \Delta \varphi_d}{dt^2} + \frac{d\Delta \varphi_d}{dt} = K_d \Delta U_{\text{ЭМУ}} \quad (2.13)$$

6. Уравнение редуктора (Р)

$$\Delta \varphi_{\text{вых}} = K_p \Delta \varphi_d. \quad (2.14)$$

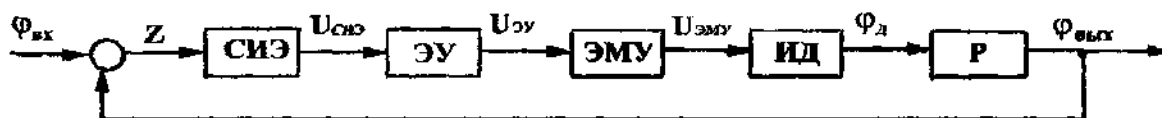


Рис. 2.5. Схема следящей системы



Решив совместно уравнения (2.9) - (2.14), получим дифференциальное уравнение системы в виде:

$$T_D T_{ЭМУ} \frac{d^3 \varphi_{\text{вых}}}{dt^3} + (T_D + T_{ЭМУ}) \frac{d^2 \varphi_{\text{вых}}}{dt^2} + \frac{d \varphi_{\text{вых}}}{dt} = K_{СИЗ} K_{ЭУ} K_{ЭМУ} K_D K_P \Delta \varphi_{\text{вх}} \quad (2.15)$$

## 2.1. Переходная, импульсная, частотная

### и передаточная функции и связи между ними

Динамические функции (характеристики) являются критерием количественной и качественной оценки свойств элементов и систем автоматического управления в процессе их работы.

**Переходной**  $[h(t)]$  называется функция (характеристика), определяющая изменение выходной величины системы или отдельного элемента при скачкообразном изменении входной величины на единицу  $[l(t)]$  и при нулевых начальных условиях.

**Импульсной** (или импульсной переходной - функцией веса)  $[k(t)]$  называется функция (характеристика), определяющая изменение выходной величины системы (или отдельного элемента) при приложении на входе единичного импульса [дельта-функции  $\delta(t)$ ] и при нулевых начальных условиях. Переходная и импульсная функции относятся к временным функциям.

**Частотной** (амплитудно-фазовой)  $[K(j\omega)]$  называется функция (характеристика), определяющая изменение амплитуды и фазы выходной величины системы (отдельного элемента) в установившемся режиме при приложении на входе гармонического воздействия:

$$K_{yx}(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{Y_m(\omega) e^{j\varphi_y(\omega)}}{X_m(\omega) e^{j\varphi_x(\omega)}} = K_{yx}(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = K_{yx}(\omega) [\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)] =$$

$$= K_{yx}(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega) + j K_{yx}(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega) = A(\omega) + jB(\omega),$$

где  $K_{yx}(\omega) = |K_{yx}(j\omega)| = \frac{Y_m(\omega)}{X_m(\omega)} = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$  - амплитудно-частотная

функция (характеристика);

$Y_m(\omega)$  и  $X_m(\omega)$  - соответственно амплитуды выходной и входной величин при фиксированной частоте  $(\omega)$ ;

$$\varphi(\omega) = \arg K_{yx}(j\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega) = \arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)} - \text{фазово-частотная функция}$$

(характеристика);

$\varphi_y(\omega)$  и  $\varphi_x(\omega)$  - соответственно фаза выходной и входной величин при фиксированной частоте  $\omega$ ;

$$A(\omega) = \operatorname{Re}[K_{yx}(j\omega)] = K_{yx}(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega) - \text{вещественная частотная функция}$$

(характеристика);

$B(\omega) = \text{Im}[K_{yx}(j\omega)] = K_{yx}(\omega) \cdot \sin\varphi(\omega)$  — мнимая частотная функция (характеристика).

**Передаточной  $[K(p)]$  функцией** (характеристикой) называется отношение изображения по Лапласу выходной величины системы (отдельного элемента) к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях.

Если  $Y(p) = \int_0^{\infty} y(t) \cdot e^{-pt} dt = L[y(t)]$  — изображение выходной величины,

а  $X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt = L[x(t)]$  — изображение входной величины,

то  $K_{yx}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$  — передаточная функция.

Свойства передаточных функций САУ:

а) передаточная функция является правильной рациональной дробью вида:

$$K_{yx}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p + c_0} = \frac{P(p)}{D(p)},$$

где  $b_i (i=1, 2, 3, \dots, m)$  и  $c_j (j=1, 2, 3, \dots, n)$  — коэффициенты, выражающиеся через параметры системы (отдельного элемента),  $n \geq m$ ;

б) все коэффициенты  $b_i$  и  $c_j$  являются вещественными числами;

в) невещественные нули и полюса передаточной функции могут быть только комплексно сопряженными величинами.

**Примечание.** При проведении расчетно-графической работы при вычислении динамических функций (характеристик) для отдельных участков схем САУ или при различных точках приложения воздействий и определения выходных величин рекомендуется пользоваться двоичными индексами, например:

$$K_{yx}(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}; \quad K_{yx}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \quad \text{и т. д.}$$

Каждая функция может быть получена непосредственно из дифференциального уравнения системы или отдельного элемента. Связи между функциями  $h(t)$ ,  $k(t)$ ,  $K(j\omega)$  и  $K(p)$  опишем с помощью табл. 2.1,

Таблица 2.1

Функции	$h(t)$	$k(t)$	$K(j\omega)$	$K(p)$
$h(t)$	—	$\text{fro}^*$ 0	$F^{-1} \left[ \frac{K(j\omega)}{j\omega} \right]$	$L^{-1} \left[ \frac{K(p)}{p} \right]$
$k(t)$	$dh(t)/dt$	—	$F^{-1}[K(j\omega)]$	$L^{-1}[K(p)J]$
$K(j\omega)$	$j\omega F[h(t)]$	$F[k(t)]$	—	$K(p)_{p=j\omega}$
ЩР)	$pL[h(t)]$	$L[k(t)]$	$K(j\omega)_{j\omega=p}$	—

где  $L$  - прямое преобразование Лапласа;

$L^{-1}$  - обратное преобразование Лапласа:

$$L^{-1}[f(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} f(p) e^{pt} dp,$$

где  $\sigma_0$  - абсцисса абсолютной сходимости функции;

$F$  - прямое преобразование Фурье:

$$F[f(t)] = f(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt;$$

$F^{-1}$  - обратное преобразование Фурье:

$$F^{-1}[f(j\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega.$$

Вычисление выходной величины  $y(t)$  может производиться по известной входной величине  $x(t)$  и

а) переходной функции  $h_{yx}(t)$ :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t x(\tau) h_{yx}(t-\tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t x(t-\tau) h_{yx}(\tau) d\tau = \\ &= x(0) h_{yx}(t) + \int_0^t x'(\tau) h_{yx}(t-\tau) d\tau = x(0) h_{yx}(t) + \int_0^t x'(t-\tau) h_{yx}(\tau) d\tau = \\ &= x(t) h_{yx}(0) + \int_0^t h'_{yx}(t-\tau) \cdot x(\tau) d\tau = x(t) h_{yx}(0) + \int_0^t h'_{yx}(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau; \end{aligned}$$

б) импульсной функции  $K_{yx}(t)$ :

$$xO = \int_0^t x(\tau) K_{yx}(t-\tau) d\tau = \int_0^t x(t-\tau) K_{yx}(\tau) d\tau;$$

в) частотной функции  $K_{yx}(j\omega)$ :

$$xO = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot K_{yx}(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega,$$

$$\text{где} \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt;$$

г) передаточной функции  $K_{yx}(p)$ :

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = L^{-1}[X(p)K_{yx}(p)].$$

Переход от изображения  $Y(p)$  к оригиналу  $y(t)$  может быть осуществлен с помощью таблиц операционных соотношений и с помощью теорем разложения.

**Пример 2.6.** Элемент САУ имеет дифференциальное уравнение вида:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_x(t),$$

где  $k$  и  $T$  - постоянные коэффициенты.

Определить для этого элемента функции:

$h_{yx}(t)$ ,  $K_{yx}(t)$ ,  $K_{yx}(j\omega)$ ,  $K_{yx}(\omega)$ ;  $\varphi(\omega)$ ,  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$ ,  $K_{yx}(p)$ .

**Решение.**

1. Записав уравнение элемента в операторной форме, получим:

$$T_p Y(p) + Y(p) = kX(p), \text{ откуда } K_{yx}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{1 + pT}.$$

2. Частотная функция:

$$K_{yx}(j\omega) = K_{yx}(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{k}{1 + j\omega T}.$$

Представив  $K_{yx}(j\omega)$  в показательной форме, получим:

$$K_{yx}(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \cdot e^{-j \arctg \omega T}$$

откуда

$$K_{yx}(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega T;$$

$$A(\omega) = K_{yx}(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2};$$

$$B(\omega) = K_{yx}(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega) = \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

3. На основании связей вышеперечисленных функций по табл. 2.1 будем иметь:

$$h_{yx}(t) = L^{-1} \left[ \frac{k(p)}{p} \right] = L^{-1} \left[ \frac{k}{p(1 + pT)} \right] = k \cdot (1 - e^{-t/T});$$

$$K_{yx}(t) = \frac{dh_{yx}(t)}{dt} = \frac{k}{T} \cdot e^{-t/T}.$$

## 2.2. Правила составления структурных схем САУ

**Структурной схемой** называется **графическое** изображение элемента или САУ, отображающее систему дифференциальных уравнений, описывающих процессы управления в этих элементах или САУ.

Условные обозначения элементов САУ изображаются (рис. 2.6):

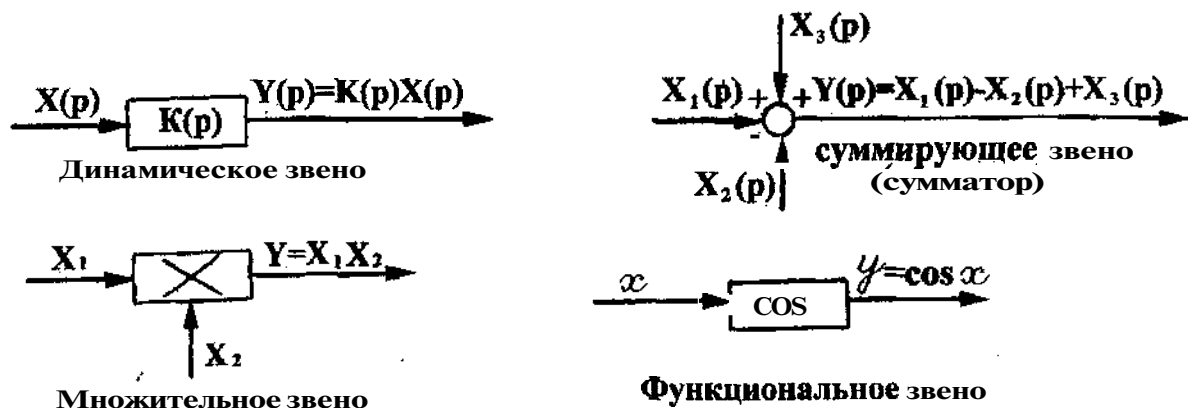


Рис. 2.6. Условные обозначения элементов структурных схем

Общие правила, которые должны выполняться при составлении структурных схем:

1. Структурная схема должна обязательно иметь входные и выходные внешние связи, задаваемые из физических соображений;
2. Каждый входной сигнал, являющийся независимой функцией времени, должен иметь только вход в структурную схему;
3. Выходной сигнал может замыкаться внутри структурной схемы и иметь выход в виде ответвления (система, замкнутая по выходному сигналу) или не замыкаться внутри структурной схемы (система, разомкнутая по выходному сигналу);
4. Все внутренние связи, определяемые системой уравнений, должны обязательно иметь входы и выходы.

Последовательность составления структурной схемы САУ по заданной схеме дифференциальных уравнений ее отдельных элементов следующая:

- а) система дифференциальных уравнений записывается в операторной форме;
- б) для каждого уравнения системы условно выбираются входная и выходная величины;
- в) каждое уравнение решается относительно выходной величины или члена, содержащего ее старшую производную;
- г) строятся графические отображения каждого из дифференциальных уравнений;
- д) строится общая структурная схема как совокупность графических отображений каждого дифференциального уравнения.

**Примечание.** Следует отметить, что задача построения структурных схем может решаться неоднозначно, то есть можно получить несколько вариантов графического изображения, но после соответствующих преобразований все изображения оказываются эквивалентными.

**Пример 2.7.** Построить структурную схему двигателя постоянного, тока с независимым возбуждением при управлении по цепи якоря (рис. 2.7), если его движение может быть записано системой линеаризованных уравнений (знаки приращений пропущены):

$$U_{\text{я}}(t) = C_e \omega_{\text{д}}(t) + i_{\text{я}}(t) R_{\text{я}} - L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}(t)}{dt}; \quad (2.16)$$

$$M_{\text{д}}(t) = M_c(t) + F_c \omega_{\text{д}}(t) + J \frac{d\omega_{\text{д}}(t)}{dt}; \quad (2.17)$$

$$M_{\text{д}}(t) = C_M i_{\text{я}}(t), \quad (2.18)$$

где  $U_{\text{я}}(t)$  – напряжение, приложенное к цепи якоря;

$i_{\text{я}}(t)$  – ток в цепи якоря;

$R_{я}$ ,  $L_{я}$  - активное сопротивление и индуктивность цепи якоря;

$C_e$  - коэффициент ЭДС двигателя;

$\omega_d(t)$  - угловая скорость вращения ротора двигателя;

$M_d(t)$  - вращающий момент двигателя;

$C_M$  - коэффициент момента двигателя;

$M_c(t)$  - момент сопротивления от сил сухого трения;

$F_c$  - коэффициент вязкого трения;

$J$  - момент инерции вращающихся частей.

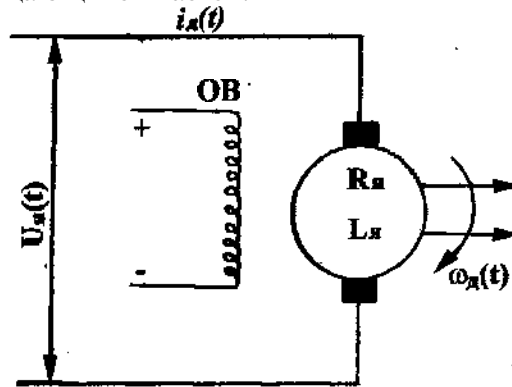


Рис. 2.7. Принципиальная схема двигателя постоянного тока насоса для перекачки горючего в кессон-баках самолета к примеру 2.7

В качестве выходной величины двигателя принимается угловая скорость  $\omega_d(t)$ .

#### Решение.

1. Уравнения (2.16)-(2.18) в операторной форме примут вид:

$$U_{я}(p) = C_e \omega_d(p) + i_{я}(p) R_{я} + p L_{я} i_{я}(p); \quad (2.19)$$

$$C_M i_{я}(p) = M_c(p) + F_c \omega_d(p) + p J \omega_d(p). \quad (2.20)$$

2. Входной величиной уравнения (2.19) является напряжение  $U_{я}$ , в качестве выходной примем ток  $i_{я}$ . Входной величиной для уравнения (2.20) будет величина  $i_{я}$ , выходной - угловая скорость  $\omega_d$ .

3. Решаем уравнение (2.19) относительно первой производной тока  $i_{я}$  и уравнение (2.20) относительно первой производной скорости  $\omega_d$ .

Получим:

$$p L_{я} i_{я} = U_{я}(p) - C_e \omega_d(p) - i_{я}(p) R_{я}, \quad (2.21)$$

$$p J \omega_d(p) = C_M i_{я}(p) - M_c(p) - F_c \omega_d(p). \quad (2.22)$$

4. Строим схему, соответствующую уравнению (2.21), рис. 2.8; строим схему, соответствующую уравнению (2.22), рис. 2.9.

5. Объединяем структурные схемы (рис. 2.8 и 2.9), замыкаем обратную связь через звено  $C_e$  и получаем структурную схему двигателя (рис. 2.10).

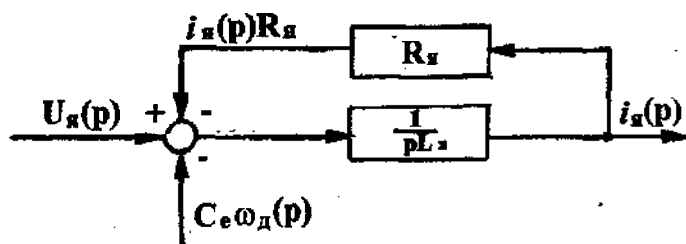


Рис. 2.8. Структурная схема, соответствующая уравнению (2.21)

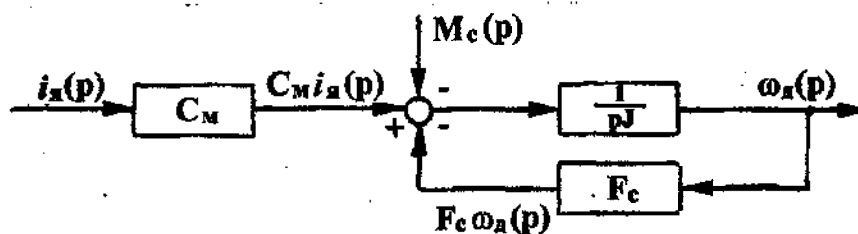


Рис. 2.9. Структурная схема, соответствующая уравнению (2.22)

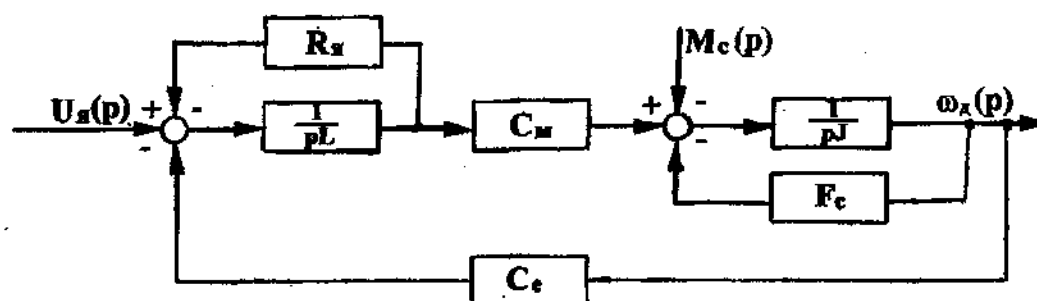


Рис. 2.10. Структурная схема двигателя к примеру 2.7

### 2.3. Основные формулы для преобразования структурных схем

При известных передаточных функциях звеньев  $[K_1(p), K_2(p), \dots, K_n(p)]$  передаточные функции групп звеньев определяются по формулам:



Рис. 2.11. Последовательное соединение звеньев

при последовательном соединении (рис. 2.11)

$$K_{yx}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \prod_{i=1}^n K_i(p) ;$$

при параллельном соединении (рис. 2.12):

$$K_{yx}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \sum_{i=1}^n K_i(p) ; \quad (2.24)$$

при охвате звена обратной связью (рис. 2.13):

$$K_{yx}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_1(p)}{1 \pm K_1(p)K_2(p)} \quad (2.25)$$

где знак плюс соответствует отрицательной, а знак минус - положительной обратной связи.

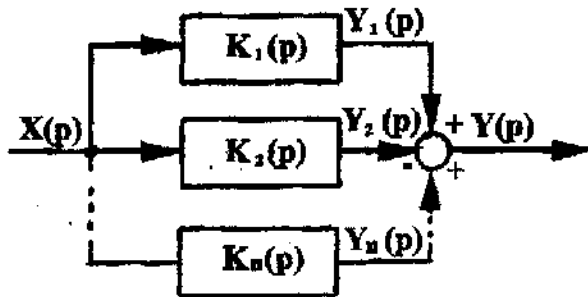


Рис. 2.12. Параллельное соединение звеньев

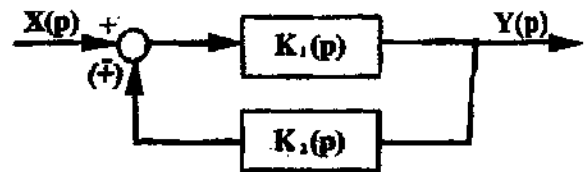


Рис. 2.13. Охват звена обратной связью

#### 2.4. Определение передаточных функций разомкнутых и замкнутых систем по задающему воздействию и возмущению

Для линейных САУ с постоянными параметрами изображение по Лапласу выходной величины:

$$Y(p) = Y_x(p) + \sum_{i=1}^n Y_{fi}(p),$$

где  $Y_x(p)$  - изображение составляющей выходной величины, обусловленной задающим воздействием  $x(t)$ ;

$Y_{fi}(p)$  - изображения составляющих выходной величины, обусловленных возмущениями  $f_i(t)$ .

В свою очередь:  $Y_x(p) = K_{yx}(p) \cdot X(p)$



$$Y_{f_i}(p) = K_{y f_i}(p) \cdot f_i(p),$$

где  $K_{yx}(p)$  – передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию;

$K_{f_i}(p)$  – передаточная функция разомкнутой системы по возмущению  $f_i(t)$ .

Для разомкнутых систем при отсутствии возмущений:

$$Y(p) = K_{yz}(p) \cdot Z(p),$$

где  $K_{yz}(p)$  – передаточная функция разомкнутой системы;

$Z(p)$  – изображение сигнала рассогласования (ошибки).

Для одноконтурных систем с единичной отрицательной обратной связью (систем основного типа) связь между  $K_{yx}(p)$  и  $K_{yz}(p)$  на основании формулы (2.25) определяется выражением:

$$K_{yx}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_{yz}(p)}{1 + K_{yz}(p)}.$$

**Пример 2.8.** Для структурной схемы САУ (рис. 2.14) определить:

1. Передаточную функцию разомкнутой системы при отсутствии возмущений –  $K_{yz}(p)$ ;
2. Передаточную функцию замкнутой системы по задающему воздействию –  $K_{yx}(p)$ ;
3. Передаточные функции замкнутой системы по возмущениям –  $K_{y f_1}(p)$  и  $K_{y f_2}(p)$ ;
4. Изображение выходной величины системы  $Y(p)$ .

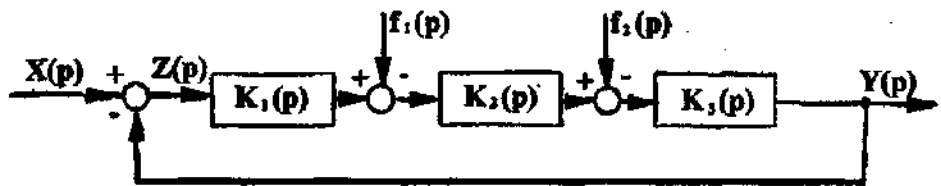


Рис. 2.14. Структурная схема к примеру 2.8

**Решение.**

1.  $K_{yz}(p) = \frac{Y(p)}{Z(p)} = K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p);$
2.  $K_{yx}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)};$
3.  $K_{y f_1}(p) = \frac{Y_{f_1}(p)}{f_1(p)} = - \frac{K_2(p) \cdot K_3(p)}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)};$   
 $K_{y f_2}(p) = \frac{Y_{f_2}(p)}{f_2(p)} = - \frac{K_3(p)}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)};$

$$4. Y(p) = Y_x(p) + Y_{f_1}(p) + Y_{f_2}(p) = K_{yx}(p)X(p) + K_{yf_1}(p)f_1(p) + K_{yf_2}(p)f_2(p) = \\ = \frac{K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)X(p) - K_2(p) \cdot K_3(p)f_1(p) - K_3(p)f_2(p)}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)}.$$

**Примечание.** Аналогичные результаты можно получить, если возмущения  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$  перенести на вход системы.

**Пример 2.9.** По структурной схеме 2.10 определить изображение выходной величины  $\omega_d(p)$ .

**Решение.** Пусть задано передаточное уравнение угловой скорости двигателя следующего вида:

$$\omega_d(p) = K_{\omega u}(p)U_{\lambda}(p) + K_{\omega m}(p)M_c(p),$$

где  $K_{\omega u}(p)$  — передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию  $U_{\lambda}$ ;

$K_{\omega m}(p)$  — передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию  $M_c$ .

Для определения  $K_{\omega u}(p)$  и  $K_{\omega m}(p)$  упрощаем структурную схему, преобразуя ее участки, содержащие звенья  $\frac{1}{pL_{\lambda}}$ ,  $R_{\lambda}$  и  $C_m$ , а также  $\frac{1}{pJ}$  и  $F_c$ , по формулам (2.23)–(2.25). Получим схему, изображенную на рис. 2.15, где

$$K_1(p) = \frac{1}{K_{\lambda}(1 + T_1 p)}, \quad K_2(p) = \frac{1}{F_c(1 + T_2 p)}, \quad K_3(p) = \frac{C_m}{R_{\lambda}}; \quad T_1 = \frac{L_{\lambda}}{R_{\lambda}}; \quad T_2 = \frac{J}{F_c}.$$

$$\text{Тогда } K_{\omega u}(p) = \frac{K_1(p) \cdot K_2(p)}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)};$$

$$K_{\omega m}(p) = \frac{K_2(p)}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)};$$

$$\omega_d(p) = \frac{K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot U_{\lambda}(p) - K_2(p) \cdot M_c(p)}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)};$$

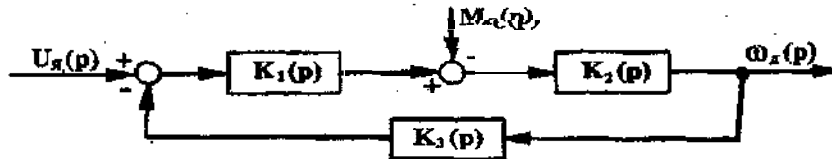


Рис. 2.15. Структурная схема к примеру 2.9

Для многоконтурных САУ передаточная функция разомкнутой системы:

$$K_{yz}(p) = \frac{Y(p)}{Z(p)} = \frac{K_{y1}(p)}{1 + \sum_{i=2}^k K_{ii}(p)}, \quad (2.26)$$

а передаточная функция замкнутой системы:

$$K_{yx}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_{y1}(p)}{1 + \sum_{i=1}^k K_{ii}(p)}, \quad (2.27)$$

где  $K_{y1}(p)$  — передаточная функция основной прямой цепи;

$K_{ii}(p)$  — передаточные функции элементов, составляющих  $i$ -й контур обратной связи;

$k$  — число контуров обратной связи.

**Примечание.** Знаки у членов  $K_{ii}(p)$  в формулах (2.26) и (2.27) определяются знаками обратных связей соответствующих контуров. Формулы (2.26) и (2.27) применимы в случае перекрещивающихся обратных связей. В противном случае структурная схема подлежит предварительному преобразованию.

**Пример 2.10.** Определить  $K_{yz}(p) = K_{yx}(p)$  многоконтурной САУ по рис. 2.16.

**Решение.**

$$K_{yz}(p) = \frac{Y(p)}{Z(p)} = \frac{K_{y1}(p)}{1 + K_{22}(p) + K_{33}(p)};$$

$$K_{yx}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_{y1}(p)}{1 + K_{11}(p) + K_{22}(p) + K_{33}(p)},$$

где

$$K_{y1}(p) = K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p) \cdot K_4(p);$$

$$K_{11}(p) = K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p) \cdot K_4(p) \cdot K_6(p);$$

$$K_{22}(p) = -K_2(p) \cdot K_3(p);$$

$$K_{33}(p) = K_3(p) \cdot K_4(p) \cdot K_5(p).$$

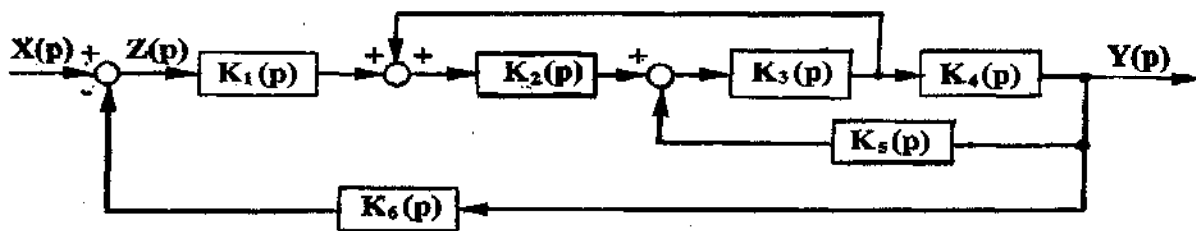


Рис. 2.16. Структурная схема к примеру 2.10

Для линейных САУ с постоянными параметрами изображение ошибки управления:

$$Z(p) = Z_x(p) + \sum_{i=1}^n Z_{fi}(p),$$

где  $Z_x(p)$  — изображение составляющей ошибки, обусловленной задающим воздействием  $X(t)$ ;

$Z_{f_i}(p)$  — изображение составляющих ошибки, обусловленных возмущающими воздействиями  $f_i(t)$ .

В свою очередь:  $Z_x(p) = K_x(p) \cdot X(p)$  и

$$Z_{f_i}(p) = K_{f_i}(p) \cdot f_i(p),$$

где  $K_{zx}(p)$  — передаточная функция ошибки по задающему воздействию;

$K_{f_i}(p)$  — передаточная функция ошибки по возмущающему воздействию.

**Пример 2.11.** Определить изображение ошибки управления для САУ, структурная схема которой приведена на рис. 2.14.

**Решение.**

$$\begin{aligned} 1. \quad K_{zx}(p) &= \frac{Z_x(p)}{X(p)} = \frac{X(p) - Y(p)}{X(p)} = 1 - K_{yx}(p) = \\ &= 1 - \frac{K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)} = \frac{1}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)}; \\ 2. \quad K_{f_1}(p) &= \frac{Z_{f_1}(p)}{f_1(p)} = \frac{K_2(p) \cdot K_3(p)}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)}; \\ 3. \quad K_{f_2}(p) &= \frac{Z_{f_2}(p)}{f_2(p)} = \frac{K_3(p)}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)}; \\ 4. \quad Z(p) &= Z_x(p) + Z_{f_1}(p) + Z_{f_2}(p) = \frac{X(p) + K_2(p) \cdot K_3(p) \cdot f_1(p) + K_3(p) \cdot f_2(p)}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p)}. \end{aligned}$$

## 2.5. Методика составления математических моделей динамических систем

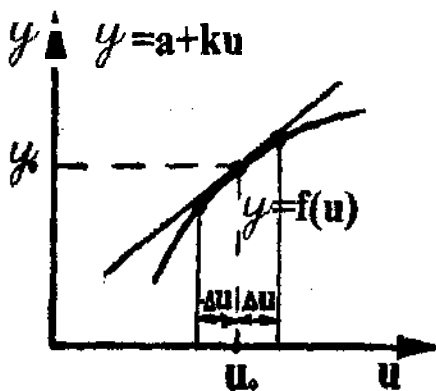
При составлении математической модели САУ часто представляется в виде совокупности элементов, рассматриваемых с точки зрения их динамических свойств. Каждое из таких звеньев может быть рассмотрено самостоятельно. При этом входная и выходная переменные соответствуют физическим воздействиям предыдущего звена на данное звено и данного звена на последующее звено. В общем случае звено системы может быть устройством любой физической природы и назначения.

Методика построения математических моделей каждого конкретного элемента системы автоматического управления, включая объект управления, является предметом изучения соответствующих курсов (электротехники, элементов автоматики, динамики полета, систем управления летательными аппаратами и др.). Однако следует остановиться на общих принципах составления математических моделей динамических звеньев и систем.

Чаще всего исходная математическая модель получается в виде системы неоднородных нелинейных дифференциальных уравнений, отыскать общее решение которых не всегда удается. Однако бывает возможно отыскать систему функций, образующих частное решение упрощенной системы уравнений, в которой не учитываются некоторые второстепенные факторы. Часто удастся сложную задачу интегрирования нелинейных уравнений свести к более простой задаче - решению линейных дифференциальных уравнений.

Достаточным условием возможности проведения линеаризации математической модели звена или системы является отсутствие разрывных неоднозначных функций. Линеаризация нелинейной аналитической функции основана на положении, что непрерывная и имеющая все производные в окрестности некоторой (рабочей) точки функция (например, статическая характеристика звена) может быть разложена в ряд Тейлора по степеням малых отклонений аргумента (рис. 2.17).

$$y(u) = y_0(u) + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 \cdot \Delta u + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)_0 \cdot \Delta u^2 + \dots$$



Если при этом отклонения аргумента  $\Delta u$  достаточно малы, то можно ограничиться первыми линейными членами разложения и рассматривать вместо нелинейных функций  $y = f(u)$  линейную, откуда, опуская символ упрощения  $\Delta$ , получим:

$$y \cong y_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 \cdot u = y_0 + k \cdot u,$$

где  $k$  - коэффициент усиления звена.

Рис. 2.17. Статическая характеристика звена

Полученные в результате линеаризации уравнения называются уравнениями первого приближения, а математическая модель - линеаризованной, или линейной моделью звена или системы.

Построение математической модели двигателя как объекта управления, входящего в САУ рассмотрим на примере.

**Пример 2.12.** Рассмотрим авиационный двигатель с винтом изменяющего шага, введя обозначения:  $\phi$  - угол разворота лопасти винта, меняющийся с изменением режима работы двигателя;  $\Omega$  - скорость вращения винта (выходного вала двигателя).

Необходимо получить математическую модель (двигателя как объекта управления) скорости вращения винта авиационного двигателя.

### Решение.

1. Предположим, что управление скоростью вращения винта осуществляется за счет изменения величины момента сил сопротивления путем разворота лопасти винта, а расход топлива остается постоянным. Обозначим входную ( $\varphi$ ) и выходную ( $\omega$ ) переменные.

2. Выберем начало и направление отсчета переменных. Возможны два варианта: за начало отсчета принимается или первоначальное состояние равновесия, или конечное, установившееся после приложения к звену внешнего воздействия. В первом случае математическая модель получается в виде неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями, а во втором - однородного с ненулевыми начальными условиями.

Примем за начало отсчета установившееся значение скорости вращения  $\omega_{\text{зад}} = \omega_0$ .

3. Составим уравнения невозмущенного движения (рис. 2.18), которое в рассмотренном примере представляет собой равенство момента  $M_g(\omega)$ , развиваемого двигателем, и момента сил сопротивления  $M_c(\omega, \varphi)$  на валу двигателя, то есть

$$M_{g_0}(\omega) - M_{c_0}(\omega_0, \varphi_0) = 0. \quad (2.28)$$

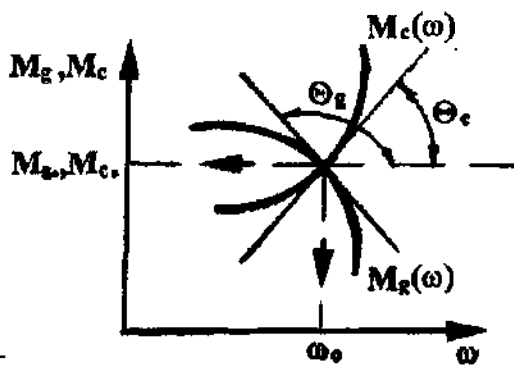


Рис. 2.18. Характеристика невозмущенного движения

4. На основании физического закона, которому подчиняется поведение объекта (в данном случае закон Ньютона), составим уравнение возмущенного движения в отклонениях от установившегося состояния, то есть :

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_g(\omega) - M_c(\omega, \varphi)$$

где  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ ;  $M_g = M_{g_0} + \Delta M_g$ ;  
 $M_c = M_{c_0} + \Delta M_c$ .

Получим

$$J \frac{d(\omega_0 + \Delta\omega)}{dt} = M_{g_0} + \Delta M_g - M_{c_0} - \Delta M_c. \quad (2.29)$$

5. Путем вычитания из уравнения (2.29) уравнения (2.28) получаем уравнение возмущенного движения в отклонениях (вариациях).

$$J \frac{d(\Delta\omega)}{dt} = \Delta M_g(\omega) - \Delta M_c(\omega, \varphi)$$

6. Исследуем возможность линеаризации имеющихся нелинейных зависимостей и произведем линеаризацию уравнений возмущенного движения:

$$\begin{aligned}
\Delta M_g(\omega) &\approx \left( \frac{\partial M_g}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega; \\
\Delta M_c(\omega, \varphi) &\approx \left( \frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega + \left( \frac{\partial M_c}{\partial \varphi} \right)_0 \Delta \varphi; \\
J \frac{\partial \Delta \omega}{\partial t} + \left[ \left( \frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 - \left( \frac{\partial M_g}{\partial \omega} \right)_0 \right] \Delta \omega - \left( \frac{\partial M_c}{\partial \varphi} \right)_0 \Delta \varphi.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Уравнение (2.30) является линейным уравнением первого приближения, записанным в абсолютных величинах. Все члены уравнения имеют размерность момента.

7. Полученное уравнение первого приближения приведем к уравнению в относительных величинах с безразмерными коэффициентами. Такая форма записи уравнений весьма удобна, так как избавляет от необходимости в каждом конкретном случае согласовывать размерности отдельных уравнений, входящих в систему, а также дает возможность свести изучение и сравнение динамических свойств большого разнообразия элементов самой различной физической природы к изучению свойств ограниченного числа так называемых типовых динамических звеньев или их комбинаций.

Поделим все члены уравнения (2.30) на величину номинального момента двигателя  $M_n$ , введем относительные отклонения и примем обозначения:

$$J \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \quad - \text{выходная координата};$$

$$U = \frac{\Delta \varphi}{\varphi_0} \quad - \text{входное управляющее воздействие};$$

$$T_0 = J \frac{\omega_0}{M_n} \quad - \text{время разгона};$$

$$K_c = \left[ \left( \frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 - \left( \frac{\partial M_g}{\partial \omega} \right)_0 \right] \frac{\omega_0}{M_n} \quad - \text{коэффициент самовыравнивания};$$

$$K_u = \left( \frac{\partial M_c}{\partial \varphi} \right)_0 \frac{\varphi_0}{M_n} \quad - \text{коэффициент регулирующего воздействия}.$$

В этом случае уравнение (2.30) преобразуется к виду:

$$T_0 \frac{dy}{dt} + K_c y = -K_u U. \tag{2.31}$$

Такая форма записи уравнений, когда коэффициенты, стоящие при производных, имеют размерность времени в степени, равной порядку производной, называется первой формой или формой Стодолы.

Другая форма записи дифференциального уравнения предусматривает введение безразмерного времени.

$$\text{Например: } m = \frac{1}{T}, \text{ тогда } \frac{dy}{d\tau} + K_c y = -k_u U. \tag{2.32}$$

Уравнения (2.31) и (2.32) являются линейной математической моделью стационарного непрерывного объекта, составляемого в форме "вход-выход".

При необходимости модель может быть записана в операторной (символической) форме или в преобразованиях Лапласа. Условно рассмотренный объект может быть представлен с помощью структурной схемы (рис. 2.19). На рисунке обозначено  $p = d/dt$ .

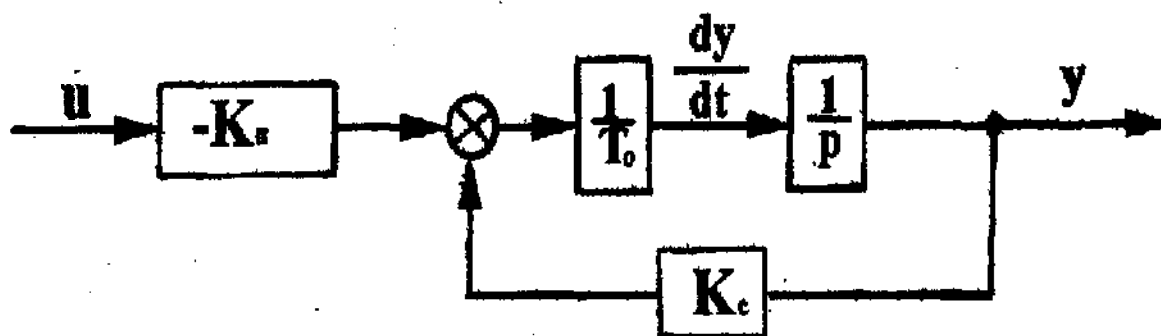


Рис. 2.19. Структурная схема стационарного непрерывного объекта

### 3. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Логарифмические амплитудные частотные характеристики весьма удобны для целей синтеза, так как их приближенное построение почти не требует вычислений. Асимптотические логарифмические амплитудные характеристики можно легко строить, пользуясь линейкой и бумагой с масштабной логарифмической сеткой. Фазовые частотные характеристики также используются при синтезе, но они играют вспомогательную роль.

В методике синтеза (разработанной В.В. Солодовниковым) расчет производится с использованием типовых логарифмических амплитудных частотных характеристик, для которых разработаны подробные номограммы показателей качества процессов регулирования. С помощью этих номограмм можно построить желаемую амплитудную частотную характеристику синтезируемой системы, определить ее передаточную функцию, найти частотные характеристики и передаточную функцию корректирующего устройства.

**Логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ)** используются при исследовании систем автоматического управления с помощью частотных методов и представляют собой амплитудные фазовые частотные характеристики замкнутых или разомкнутых САУ (или элементов САУ), построенные в полулогарифмическом масштабе.



**Логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАЧХ)** системы (элементов системы) называется кривая, соответствующая 20 десятичным логарифмам модуля частотной характеристики системы (элементов), построенная в десятичном логарифмическом масштабе частот:

$$L(\omega) = 20 \lg |K(j\omega)|,$$

где  $K(j\omega)$  - частотная характеристика системы (элементов);

$L(\omega)$  - логарифмическая амплитудная частотная характеристика этой системы (элементов).

**Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ФЧХ)** системы (или элементов системы) называется фазовая частотная характеристика  $\varphi(\omega)$ , построенная в десятичном логарифмическом масштабе частот.

При построении ЛЧХ на оси абсцисс откладываются десятичные логарифмы частоты  $\omega$  или значение самой частоты в логарифмическом масштабе. На практике наиболее распространенным является способ, при котором шкала в отношении со будет неравномерной (логарифмическая шкала). Отрезок этой шкалы, соответствующий изменению  $\omega$  в 10 раз, называется **декадой**, а отрезок, соответствующий изменению со в 2 раза, **октавой**.

Построение логарифмической шкалы производится с помощью шаблона, рассчитываемого по формуле:  $/ = m_d \lg k$ ,

где  $m_d$  - масштаб декады, выбираемой с точки зрения удобств построения и требуемой относительной погрешности;

$k$  - число от 1 до 10;

$/$  - величина отрезка шкалы между точкой, соответствующей  $k=l$ , и последующими точками.

На оси ординат при построении ЛАХ значения амплитудной частотной характеристики откладываются в децибелах. Перевод чисел в децибелы производится по формуле:

$$L(B) \text{ дБ} = 20 \lg B,$$

где  $B$  - число;

ЦВ) - число  $B$ , измеренное в децибелах.

Перевод любого другого числа в децибелы производится по формуле:

$$L(10 \pm iA) = \pm i \cdot 20 + L(A).$$

**Примеры:**

$$1. B=90=10^1 \cdot 9, L(B)=1 \cdot 20 + L(9) \approx 33 \text{ дБ};$$

$$2. B=0,09=10^{-2} \cdot 9, L(B)=-2 \cdot 20 + L(9) \approx -21 \text{ дБ}.$$

Для обратного перевода ЦВ) представляют в виде  $L(B) = \pm i20 + c$ ,

где  $0 < c < 20 \text{ дБ}$ , а  $B$  находят по формуле  $B = 10^{\pm c} \cdot A$ ,  
 $A$  определяется из кривых для  $L(A) = c$ .

**Примеры:**

1.  $L(B) = -26 \text{ дБ} = -2 \cdot 20 + 14$ ,  $B \approx 10^{-2} \cdot 5$ ;
2.  $L(B) = 23,5 \text{ дБ} = 1 \cdot 20 + 3,5$ ,  $B \approx 10^1 \cdot 1,5$ .

При построении ФЧХ по оси ординат значения фазовой частотной характеристики откладываются в градусах.

### 3.1. Построение логарифмических частотных характеристик разомкнутых систем

Для построения ЛЧХ передаточную функцию системы представляют в виде произведения передаточных функций элементарных динамических звеньев:

$$K(p) = \prod_{i=0}^f K_i p^{\pm v} \prod_{i=0}^d \frac{1}{1 \pm pT_i} \prod_{k=0}^c \frac{1}{1 \pm 2\xi_k T_k p + T_k^2 p^2} \prod_{j=0}^g (1 \pm pT_j) \prod_{r=0}^a (1 \pm 2\xi_r T_r p + T_r^2 p^2),$$

где  $K_j$  - коэффициенты усиления усилительных звеньев;

$T$  - постоянные времени элементарных звеньев;

$\xi$  - показатели колебательности звеньев второго порядка;

$g$  - количество интегрирующих ( $-v$ ) или идеально дифференцирующих ( $+v$ ) звеньев (при  $v \neq 0$ ).

Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики системы определяются выражениями:

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^k L_{zi}(\omega); \quad \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^k \varphi_{zi}(\omega),$$

где  $k$  - количество элементарных звеньев;

$L_z(\omega)$  и  $\varphi_z(\omega)$  - ЛАХ и ФЧХ элементарного звена.

Более подробно о методах логарифмических частотных характеристик в построении и синтезе САУ читайте в работе авторского коллектива МВТУ им. Баумана (Основы теории автоматического управления /Под общ. ред. Н.Б.Судзиловского. М.: Машиностроение, 1985. С. 368-404 ).

### 3.2. Логарифмические частотные характеристики элементарных звеньев

Усиленное звено с передаточной функцией  $K(p)=K$ .

Это звено имеет ЛЧХ следующего вида:

$$L(\omega) = 20 \lg K; \quad \varphi(\omega) = 0.$$

Амплитудно-фазовая (частотная) характеристика звена и его логарифмическая частотная характеристика изображаются следующими графиками.

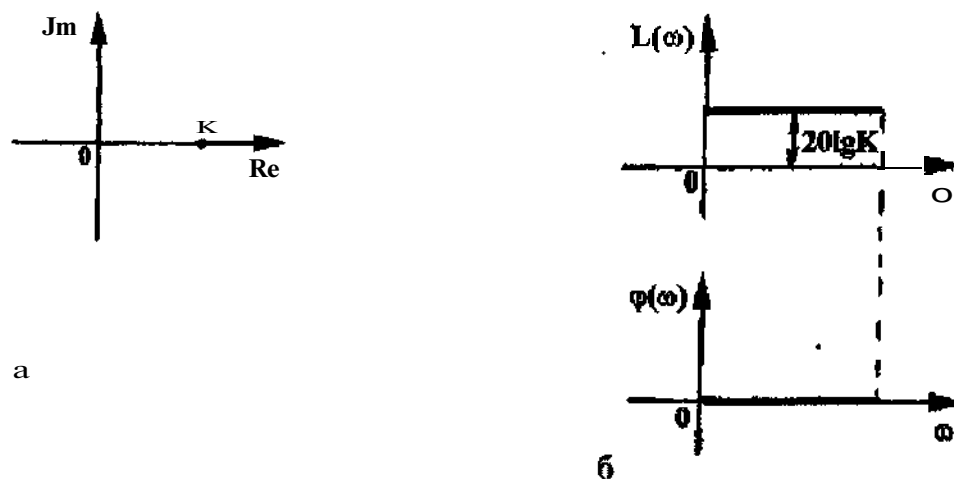


Рис. 3.1. Амплитудно-фазовая (а) и логарифмическая частотные характеристики (б) усиленного звена

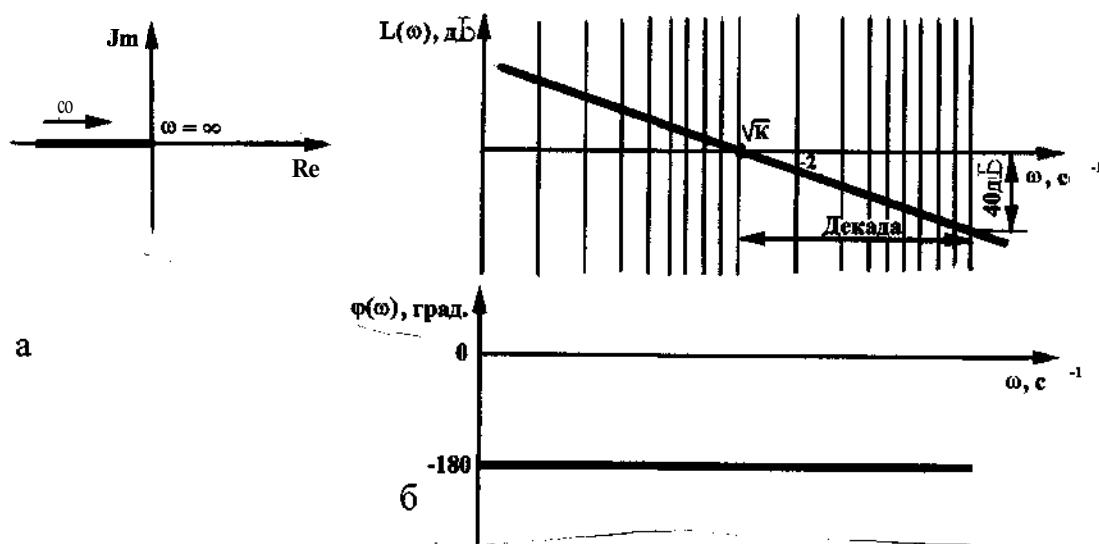


Рис. 3.2. Амплитудно-фазовая (а) и логарифмические (б) частотные характеристики звена

$$с K(p) = \frac{K}{p^2}$$

Последовательное соединение усиленного звена и  $\nu$  - интегрирующих звеньев. Это соединение имеет передаточную функцию

вида  $K(p) = \frac{K}{p^\nu}$ .

Логарифмические частотные характеристики определяются формулами:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{c\omega^v}; \quad \varphi(\omega) = -v \frac{\pi}{2}.$$

Для построения ЛАХ на оси абсцисс откладывается точка  $c\omega = \sqrt[v]{K}$  и через нее проводится прямая с наклоном  $-v \cdot 6 \text{ дБ/окт} = -v \cdot 20 \text{ дБ/дк}$ .

**Пример 3.1.** Построить АФХ и ЛЧХ для  $D=2$ .

**Решение.** Построим графики в соответствии с методикой (рис. 3.2).

**Последовательное соединение усилительного звена и  $m$  идеально дифференцирующих звеньев с передаточной функцией  $K(p) = Kp^m$ .** Логарифмические частотные характеристики строятся по формулам

$$L(\omega) = 20 \lg K\omega^m; \quad \varphi(\omega) = +m \frac{\pi}{2} \quad \text{и имеют вид, представленный на рис. 3.3.}$$

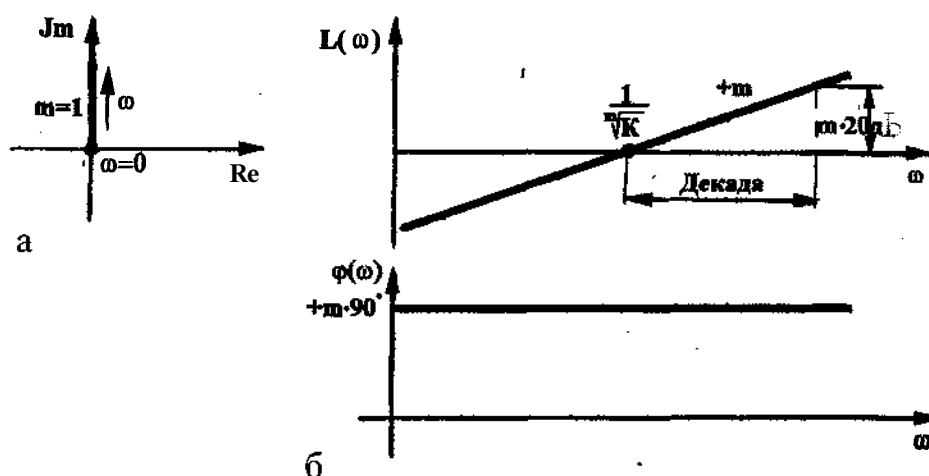


Рис. 3.3. Частотные характеристики звена с  $K(p) = Kp^n$ :  
(а) - АФХ; (б) - ЛЧХ

**Примечание.** Для упрощения записи в дальнейшем наклон прямой в графиках ((б) рис. 3.2 и 3.3), например,  $\pm 6 \text{ дБ/окт} = \pm 20 \text{ дБ/дк}$ , следует обозначить через  $\pm 1$ , наклон  $\pm m \cdot 20 \text{ дБ/дк}$  - через  $\pm m$ .

**Апериодическое звено с передаточной функцией  $\kappa(p) = \frac{1}{1+p \cdot T}$ .**

Логарифмические характеристики определяются по формулам:

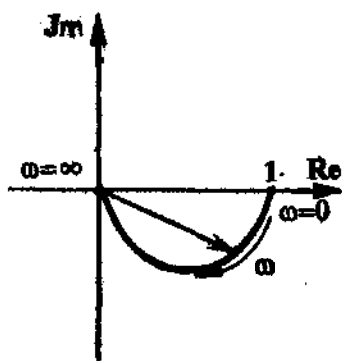
$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 \cdot T^2}; \quad \varphi(\omega) = -\arg \operatorname{tg} \omega T.$$

Приближенная (асимптотическая) ЛАХ звена представляет собой две асимптоты, сопрягающиеся в точке  $\omega = \frac{1}{T}$  ("опорная" или "сопрягающаяся" частота). Точная ЛАХ отличается от асимптотической на величину поправок АЛ. Амплитудно-фазовая характеристика апериодического звена и его логарифмические характеристики показаны на рис. 3.4.

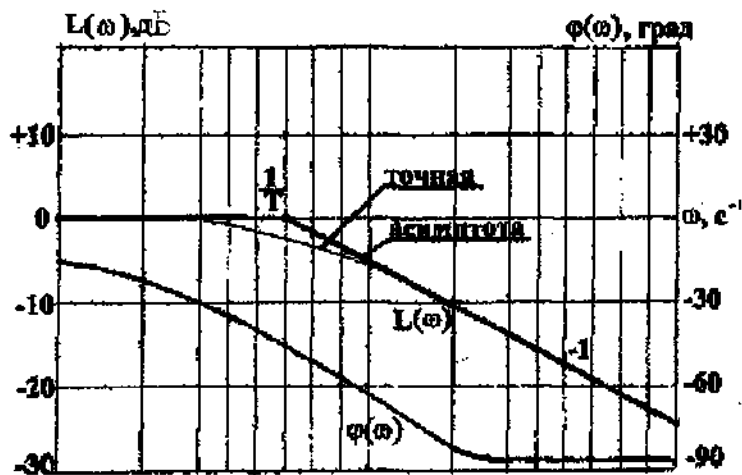
При вычислении фазовой характеристики на частотах, находящихся вне интервала  $0,5 < \omega T < 2,0$ , можно воспользоваться приближенными соотношениями:

$$\varphi^\circ(\omega) \approx -57,3 \cdot \omega \cdot T \quad \text{при } \omega T < 0,5;$$

$$\varphi^\circ(\omega) \approx -57,3 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \cos \cdot T \right) \quad \text{при } \omega T > 2.$$



а



б

Рис. 3.4. Частотные характеристики апериодического звена:  
(а)-АФХ; (б)-ЛЧХ

Ошибка при пользовании этими формулами вне указанного интервала не превышает  $0,4^\circ$ .

Дифференцирующее звено первого порядка с передаточной функцией  $K(p) = (1 + p \cdot T)$ . Это звено имеет ЛЧХ, определяемые выражениями:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \sqrt{1 + \omega^2 \cdot T^2}; \quad \varphi(\omega) = \arg \operatorname{tg} \omega \cdot T.$$

Эти характеристики (рис. 3.5) представляют собой зеркальное отображение относительно оси абсцисс соответствующих характеристик апериодического звена.

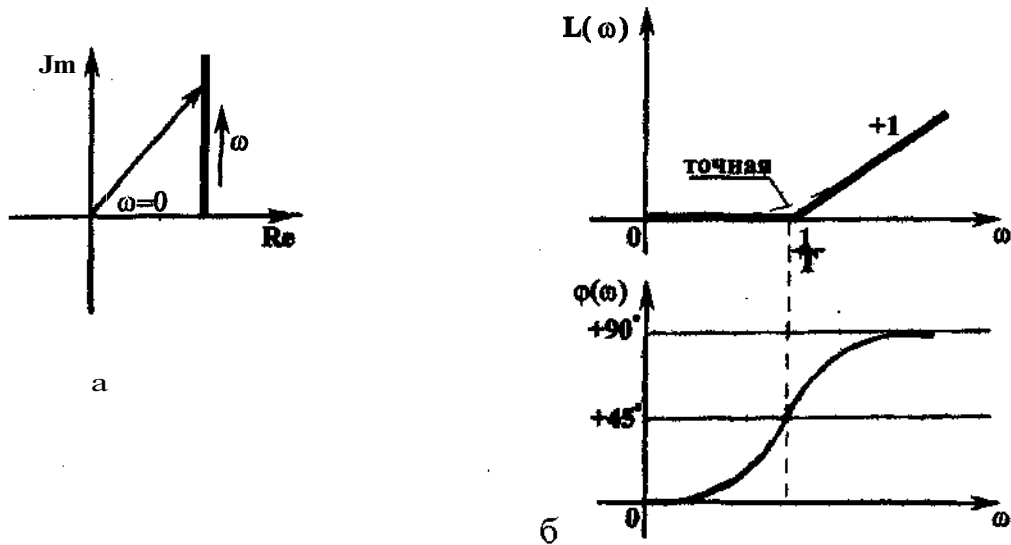


Рис. 3.5. Частотные характеристики дифференцирующего звена первого порядка: (а) - ФЧХ; (б) - ЛЧХ

При уточнении асимптотической ЛАХ, а также при построении ФЧХ дифференцирующих звеньев первого порядка (рис. 3.5 б) необходимо пользоваться соответствующими кривыми, изменив знак на обратный (рис.3.6).

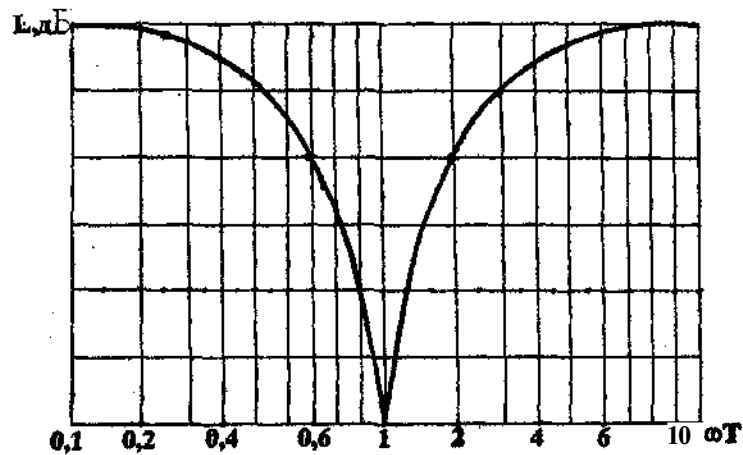


Рис. 3.6. График отклонения точной ЛАХ апериодического звена от асимптотической

### Колебательное звено с передаточной функцией

$$K(p) = \frac{1}{1 + 2 \cdot \xi \cdot T p + T^2 \cdot p^2}.$$

Логарифмические частотные характеристики определяются по формулам:

$$L(\omega) = -20 \cdot \lg \sqrt{(1 - \omega^2 \cdot T^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2}; \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \xi \cdot T \cdot \omega}{1 - \omega^2 \cdot T^2}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика и ЛЧХ колебательного звена для некоторого фиксированного значения  $\xi$  показаны на рис. 3.7. Величина отклонения точной ЛАХ от асимптотической зависит от значения  $\xi$  и имеет

максимум на частоте  $\omega = \frac{1}{T}$ .

При этом  $L_{\max} \left( \omega = \frac{1}{T} \right) = -20 \cdot \lg 2 \cdot \xi.$

Приведенная выше формула и построенный ниже график (рис. 3.8) позволяют уточнять асимптотическую логарифмическую амплитудную частотную характеристику по одной точке.

Точная ЛАХ практически перестает отличаться от асимптотической при отклонении в обе стороны от опорной частоты  $\omega = \frac{1}{T}$  на 2-3 октавы.

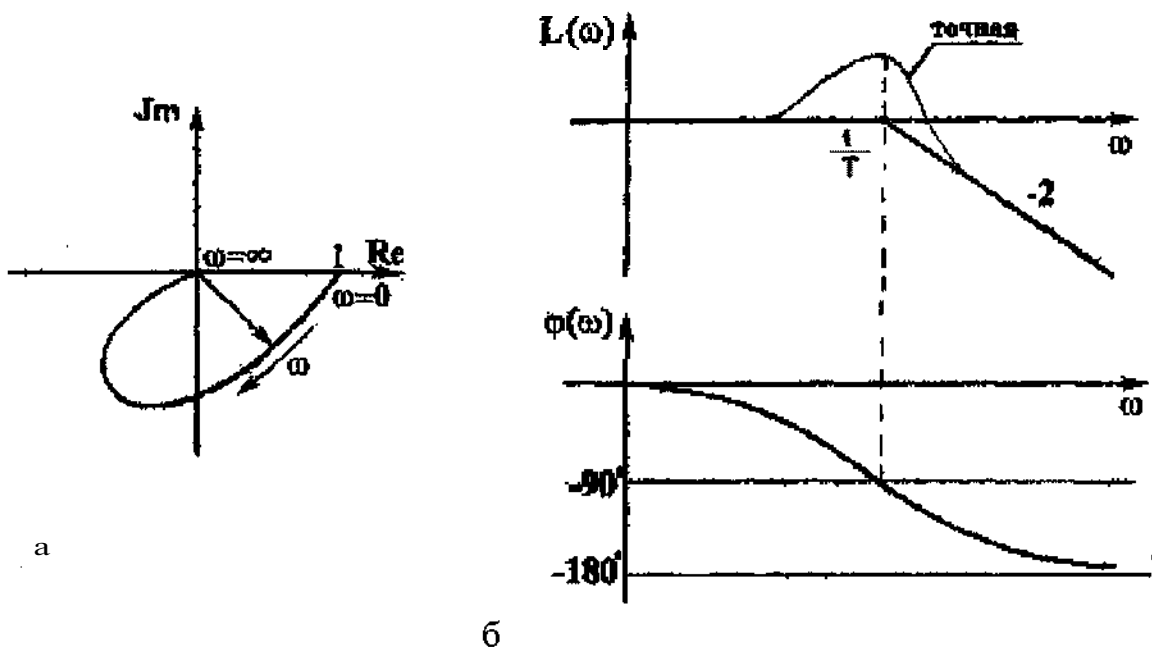


Рис. 3.7. Частотные характеристики колебательного звена:

(а) - АФХ; (б) - ЛЧХ

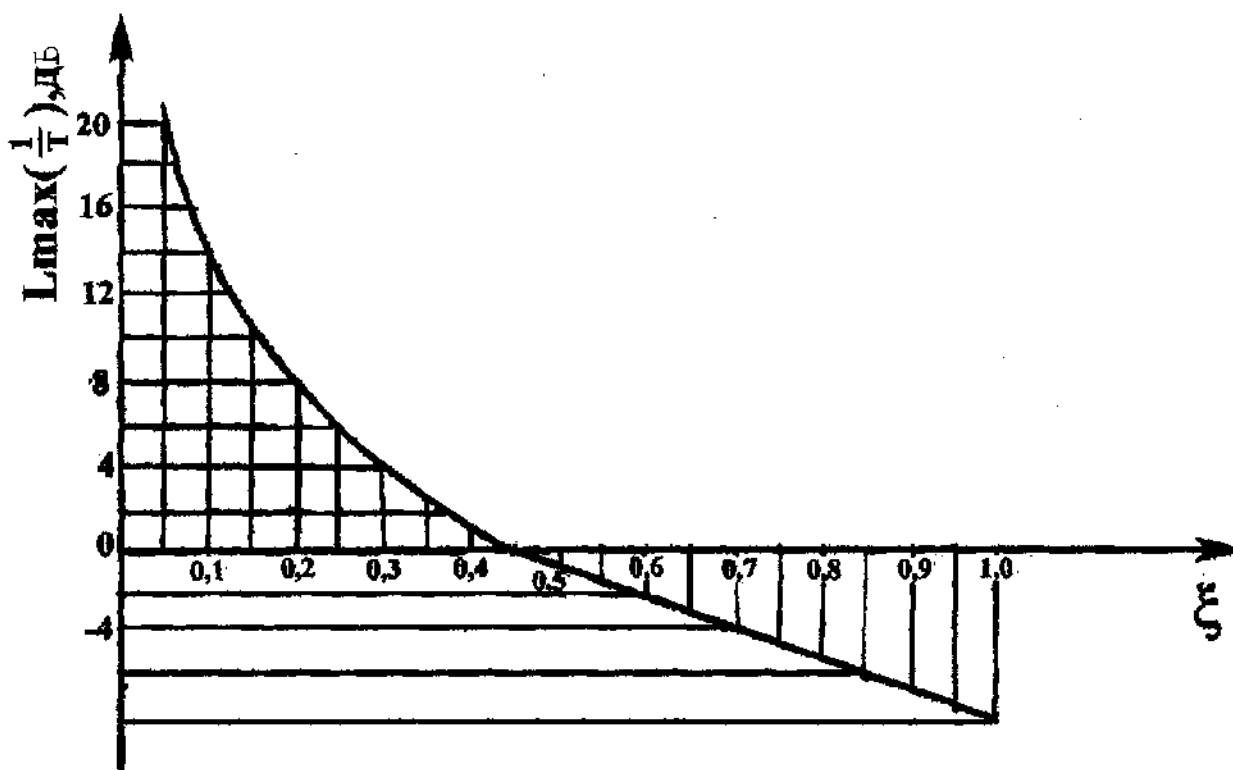


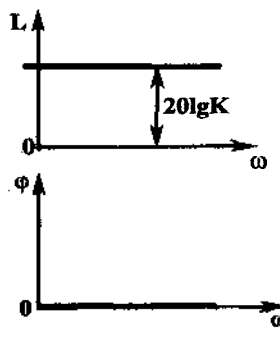
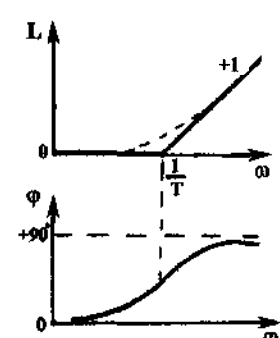
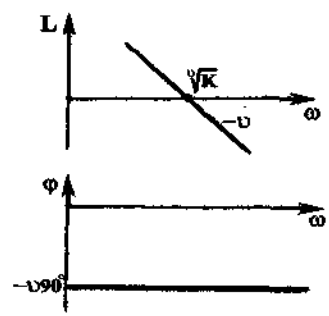
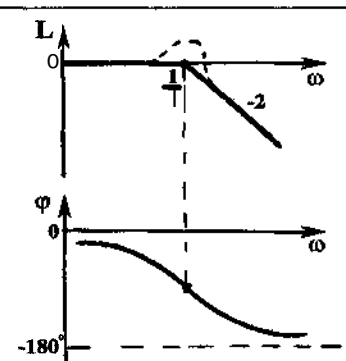
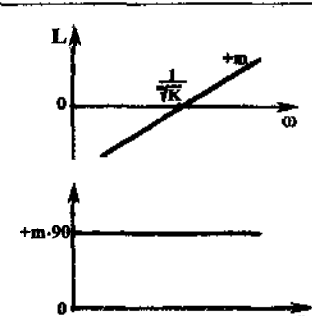
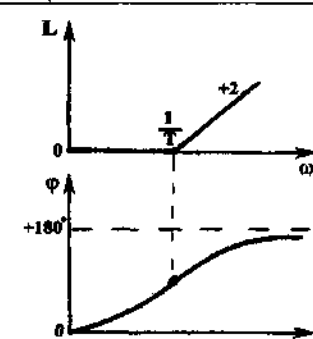
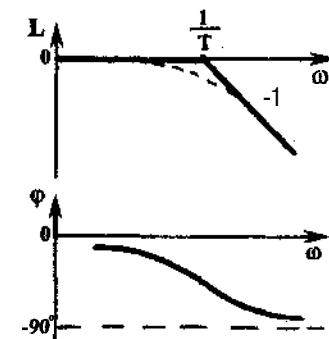
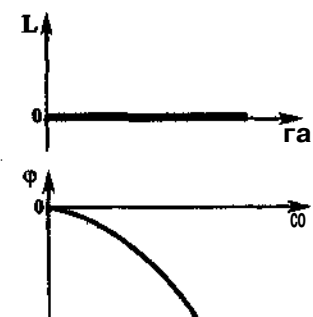
Рис. 3.8. График для определения значения резонансного пика ЛАХ колебательного звена

**Дифференцирующее звено второго порядка с передаточной функцией**  $K(p) = (1 + 2\zeta T p + T^2 p^2)$ . Логарифмические частотные характеристики этого звена отличаются от соответствующих характеристик колебательного звена только знаком. Для их построения используются специальные номограммы, их можно использовать для уточнения ЛАХ и построения ФЧХ дифференцирующих звеньев второго порядка, если знаки получаемых поправок  $\Delta L$  и значений  $\varphi$  поменять на обратные.

**Запаздывающее звено с передаточной функцией**  $K(p) = e^{-p\tau}$ . Это звено имеет логарифмические частотные характеристики, определяемые выражениями:  $L(\omega) = 0$ ;  $\varphi^o(\omega) = -57,3 \cdot \omega \cdot \tau$ . Сведем логарифмические частотные характеристики всех рассматриваемых звеньев качественно в таблицу 3.1.



Таблица 3.1

№ п/п	K(p)	L(ω), φ(ω)	№ п/п	K(p)	L(ω), φ(ω)
1.	K		5.	$1+p \cdot T$	
2.	$\frac{K}{p^v}$		6.	$\frac{1}{1+2\xi Tp+T^2 p^2}$	
3.	$K p^m$		7.	$1+2\xi Tp+T^2 p^2$	
4.	$\frac{1}{1+pT}$		8.	$e^{-pr}$	

Амплитудно-фазовые и логарифмические частотные характеристики, соответствующие:

а) неустойчивым апериодическим звеньям с передаточными функциями:

$$K(p) = \frac{1}{-1+pT}; \quad K(p) = \frac{1}{1-pT};$$

б) неустойчивому колебательному звену с передаточной функцией:

$$K(p) = \frac{1}{1-2\xi \cdot Tp + T^2 p^2};$$

в) консервативному звену с передаточной функцией:

$$K(p) = \frac{1}{1+T^2 p^2};$$

г) звеньям минимально-фазового типа с передаточными функциями:

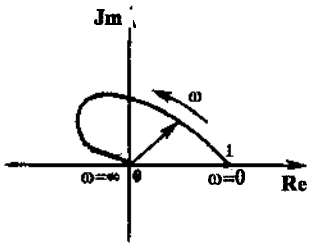
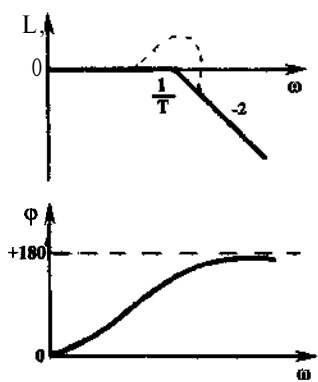
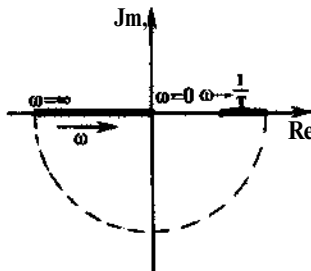
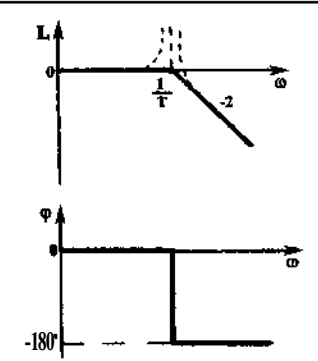
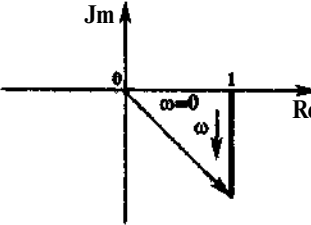
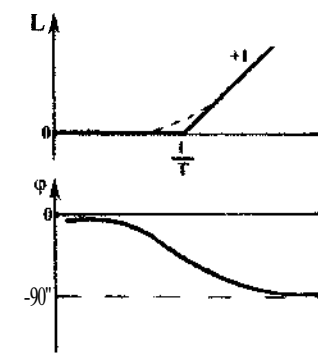
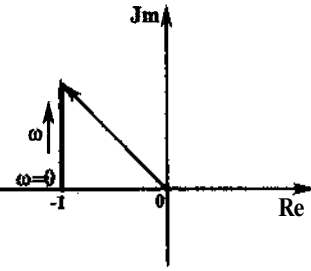
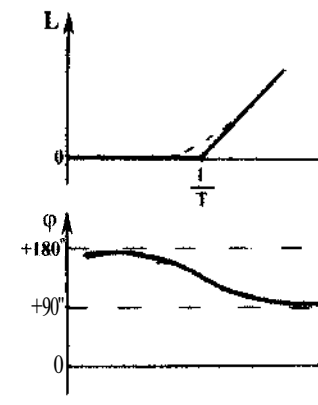
$$\begin{aligned} K(p) &= (1-pT); & K(p) &= (-1+pT); \\ K(p) &= (1-2\xi Tp + T^2 p^2); & K(p) &= (1+p^2 T^2). \end{aligned}$$

системно организуем и сведем в таблицу 3.2.

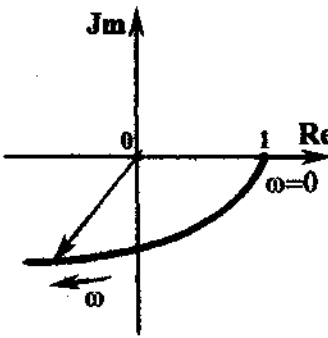
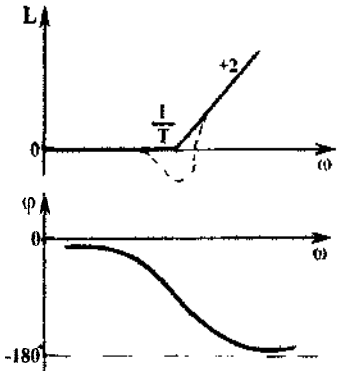
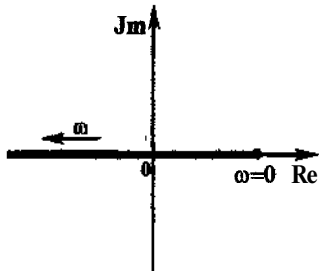
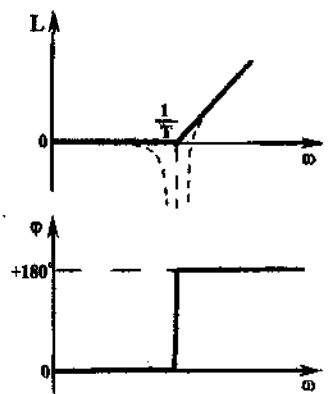
Таблица 3.2

№ п/п	$K(p)$	$K(j\omega)$	$L(\omega), \varphi(\omega)$
1	2	3	4
1.	$\frac{1}{1-pT}$		
2.	$\frac{1}{-1+pT}$		

Продолжение таблицы 3.2

1	2	3	4
3.	$\frac{1}{1 - 2\xi Tp + p^2 T^2}$		
4.	$\frac{1}{1 + p^2 T^2}$		
5.	$1 - Pt$		
6.	$-1 + pT$		

Окончание таблицы 3.2

1	2	3	4
7.	$1 - 2\xi Tp + T^2 p^2$		
8.	$1 + p^2 T^2$		

Сравнение этих характеристик с характеристиками устойчивых звеньев минимально-фазового типа (см. табл. 3.1) показывает, что построение ЛЧХ может производиться с помощью описанных выше приемов, но с учетом особенностей, касающихся фазовых характеристик.

### 3.3 Методика построения логарифмических частотных характеристик разомкнутой одноконтурной системы

При известной передаточной функции разомкнутой одноконтурной системы, записанной в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев, для построения логарифмической амплитудной частотной характеристики необходимо:

1. Определить опорные (сопрягающие) частоты звеньев

$$(\omega_1 = \frac{1}{T_1} < \omega_2 = \frac{1}{T_2} < \dots) \text{ и нанести их на оси абсцисс;}$$

2. Провести низкочастотную асимптоту  $L(\omega)$ , представляющую собой при  $\omega < \omega_1$  прямую с наклоном  $(-v)$ , если система содержит  $(v)$  интегрирующих звеньев, или прямую с наклоном  $(+t)$ , если имеется  $(t)$  идеально дифференцирующих звеньев. В первом случае эта прямая пересекает ось абсцисс на частоте  $\omega_0 = \sqrt[v]{K}$ , во втором случае  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt[t]{K}}$ , где  $K$  - коэффициент преобразования системы.

Если система статическая (то есть  $v=m=0$ ), то до частоты  $\omega=\omega_1$  ЛАХ будет иметь нулевой наклон к оси абсцисс и отстоять от нее на величину  $20 \lg K$ . Методика построения ЛАХ для всех трех случаев показана соответственно на рис. 3.1, 3.2, 3.3;

3. Продолжить построение ЛАХ, изменяя наклон  $L(\omega)$  после каждой из опорных частот в зависимости от того, какому звену эта частота принадлежит. При этом каждое апериодическое и дифференцирующее первого порядка звено, начиная с опорной частоты, изменяет наклон ЛАХ на  $(-1)$  или  $(+1)$  соответственно, а колебательное и дифференцирующее второго порядка звено - на  $(-2)$  или  $(+2)$  соответственно;

4. Пользуясь кривыми поправок (см. библиографию), уточнить полученную асимптотическую ЛАХ. Поправки, полученные для характеристик звеньев, опорные частоты которых отклоняются друг от друга менее чем на 2-3 октавы, складываются алгебраически.

Фазовая частотная характеристика системы определяется как сумма значений ФЧХ каждого из элементов системы на фиксированной частоте. Эти значения могут быть вычислены по приближенным или точным формулам, а также с помощью номограмм.

При построении ЛАХ и ФЧХ значения поправок  $\Delta L$ , и фазовых сдвигов  $\varphi$  удобно сводить в таблицы.

**Пример 3.2.** Построить логарифмическую частотную характеристику разомкнутой одноконтурной системы с передаточной функцией:

$$K(p) = \frac{K_v (1 + pT_2)^2}{p(1 + 2 \cdot \xi \cdot T_1 \cdot p + T_1^2 p^2)^2 (1 + pT_3)} = \frac{100(1 + 0,33p)^2}{p(1 + 2 \cdot 0,2p + p^2)(1 + 0,033p)}.$$

**Решение.** С помощью номограммы (рис. 3.9) построим кривые ЛАХ и определим по этой номограмме численные значения  $\Delta L$ ,  $\varphi$  и  $\Delta L_\Sigma$ ,  $\varphi_\Sigma$  через значения  $\omega_0$ ,  $\omega$ , сведенные в таблицу 3.3.

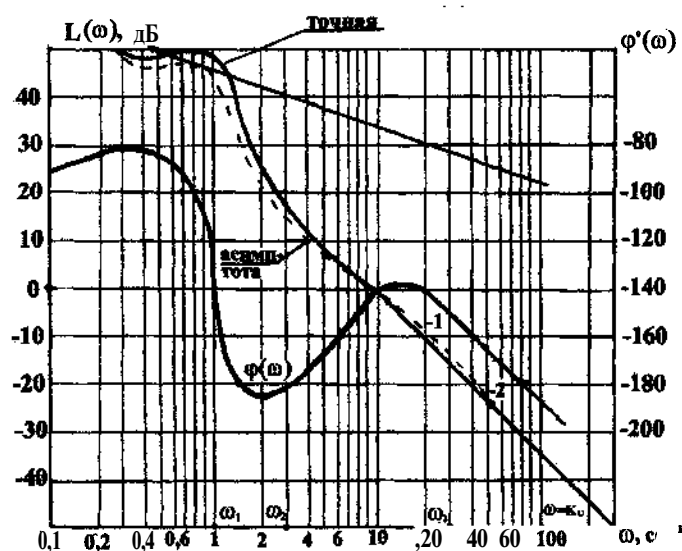


Рис. 3.9. Пример построения ЛЧХ разомкнутой одноконтурной системы

Таблица 3.3

Звено \ $\omega, c^{-1}$	Идент	0,1	0,5	1	2	3	5	10	20	30	50	200
$\frac{1}{1 + 2 \cdot 0,2p + p^2}$	$\Delta L$	0	2,2	8	2,2	0,8	0,3	0	0	0	0	0
	$\Phi$	-2,5	-15	-90	-165	-172	-176	-180	-180	-180	-180	-180
$\frac{100}{P}$	$\Delta L$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\Phi$	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90
$(1 + 0,33p)^2$	$\Delta L$	0	0,4	1,2	3,2	6	3,2	0,8	0	0	0	0
	$\Phi$	4	20	40	74	90	120	150	164	168	174	180
$\frac{1}{1 + 0,33p}$	$\Delta L$	0	0	0	0	0	-0,2	-0,6	-1,6	-3	-1,6	0
	$\Phi$	0	0	-2	-4	-6	-9	-20	-37	-45	-60	-82
	$\Delta L_{\Sigma}$	0	2,6	9,2	5,4	6,8	3,3	0,2	-1,6	-3	-1,6	0
	$\Phi_{\Sigma}$	-87,5	-85	-142	-185	-178	-154	-140	-143	-147	-156	-172

### 3.4 Построение ЛЧХ комбинированных систем

Построение логарифмических частотных характеристик системы с комбинированным управлением основывается на замене этой системы эквивалентной следящей системой с управлением только по отклонению. Передаточная функция последней составляется в виде, удобном для использования номограммы пересчета и соответствующих правил.

Исходная система в замкнутом состоянии имеет передаточную функцию:

$$K_{yx}(p) = \frac{[K_1(p) + K_3(p)]K_2(p)}{1 + K_1(p) \cdot K_2(p)}$$

Эквивалентная система, работающая только по отклонению, должна иметь передаточную функцию в разомкнутом состоянии.

$$K_{yx}(p) = \frac{K_{yx}(p)}{1 - K_{yx}(p)} = \frac{[K_1(p) + K_3(p)]K_2(p)}{1 - K_1(p) \cdot K_2(p)}$$

С учетом принятых обозначений ЛЧХ разомкнутой системы (рис. 3.10) определяется по формулам:

$$L(\omega) = L_{x1}(\omega) + L_{x2}(\omega); \quad \varphi(\omega) = \varphi_{x1}(\omega) + \varphi_{x2}(\omega),$$

где слагаемые, входящие в правые части, определяются по номограмме пересчета. Для нахождения ЛЧХ исходной системы по полученным  $L(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  определяются  $L_{yx}(\omega) = L_0(\omega)$  и  $\varphi_{yx}(\omega) = \varphi_0(\omega)$ .

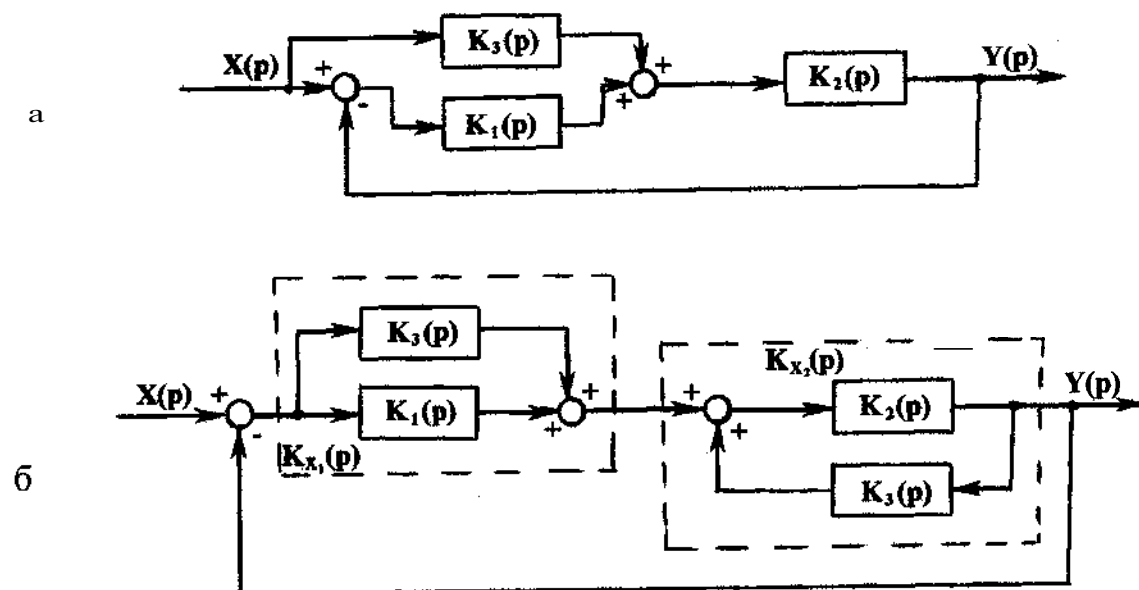


Рис. 3.10. Пример замены комбинированной системы (а)  
эквивалентной следящей системой (б)

В ряде случаев при **определении параметров асимптотических ЛАХ по передаточной функции разомкнутой одноконтурной системы**, когда возникает необходимость в вычислении величины амплитуды или фазы только на одной или нескольких заданных частотах, а также при вычислении частоты **среза**  $\omega_c$  и значения **ФЧХ** на этой частоте, можно воспользоваться приближенным способом вычисления, не прибегая к построению логарифмических частотных характеристик во всем диапазоне частот.

Этот способ основан на представлении асимптотической передаточной функции в виде:

$$K_{ac}(p) = \frac{Kp^{uv} \prod_{r=0}^a T_r^2 p^2 \prod_{j=0}^e T_j p}{\prod_{i=0}^d T_i p \prod_{k=0}^e T_k^2 p^2},$$

что соответствует только высокочастотным асимптотам логарифмических амплитудных частотных характеристик звеньев.

Если известна передаточная функция разомкнутой одноконтурной системы, то **определение значения амплитудно-частотной характеристики** по заданной (фиксированной) частоте  $\omega = \omega_k$ , соответствующей асимптотической ЛАХ на этой частоте, производится по следующей методике:

- 1) в передаточной функции системы **ВМЕСТО**  $p$  записывается  $\omega_x$ ;
- 2) отбрасываются все звенья, опорные частоты которых больше  $\omega_x$ ;
- 3) отбрасываются единицы в выражениях для передаточных функций звеньев. В звеньях второго порядка отбрасываются, кроме того, члены вида  $2 \cdot \xi T_{\omega x}$ .

Из полученного выражения определяется асимптотическое значение амплитудно-частотной характеристики  $K_{ac}(\omega_x)$ .

Пусть необходимо найти  $K_{ac}(\omega_x \cdot 5 \text{ с}^{-1})$ , если

$$K(p) = \frac{100(1 + p/0,1)(1 + p/4 + p^2/16)}{p^2(1 + p)(1 + p/10)^2}.$$

Согласно изложенной методике, необходимо отбросить звено с опорной частотой  $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$ , а тогда:

$$K_{ac}(\omega_x) = \frac{100 \frac{0,1}{\omega_x} \cdot \frac{\omega_x^2}{16}}{\omega_x \cdot \omega_x} = \frac{100 \frac{5}{0,1} \cdot \frac{5^2}{16}}{5 \cdot 5} = 62,5.$$

Точное значение  $K(\omega_x)$  совпадает с асимптотическим, если на частоте  $\omega = \omega_x$  точная ЛАХ не отличается от асимптотической.

В противном случае необходимо производить уточнение.

**Значение частоты среза асимптотической ЛАХ определяется по следующей методике:**



- 1) передаточной функции разомкнутой одноконтурной системы  $s$  вместо  $(p)$  записывается  $\omega_{c.a.}$ ;
- 2) в левой части равенства вместо  $K(p)$  записывается 1;
- 3) отбрасываются единицы и члены вида  $2\xi T\omega$  в выражениях для передаточных функций звеньев;
- 4) отбрасываются звенья, опорные частоты которых находятся за частотой среза асимптотической ЛАХ  $\omega_{c.a.}$ .

Если, например, необходимо найти частоту среза асимптотической ЛАХ системы с передаточной функцией:

$$K(p) = \frac{200(1+p)}{p \left(1 + \frac{p}{0,1}\right) \left(1 + \frac{p}{50}\right)}$$

и известно, что  $\omega_{c.a.}$  расположена между опорными частотами  $\omega_2 = 1 \text{ с}^{-1}$  и  $\omega_3 = 50 \text{ с}^{-1}$ , то, согласно изложенной методике, можно записать:

$$1 = \frac{200\omega_{ca}}{\omega_{ca} \frac{\omega_{ca}}{0,1}}$$

Отсюда  $\omega_{c.a.} = 20 \text{ с}^{-1}$ .

Если заранее не известно, между какими опорными частотами находится  $\omega_{c.a.}$  (т.е. не известно, какими звеньями в передаточной функции надо пренебречь), то производятся предварительные вычисления: путем последовательного пренебрежения элементарными звеньями по методике определяются две соседние опорные частоты  $\omega'_i$  и  $\omega''_i$  (рис. 3.11), по одной из которых  $K_{a.c}(\omega'_i) > 1$  (т.е.  $L_{a.c}(\omega'_i) > 0$ ), а на другой  $K_{a.c}(\omega''_i) < 1$  ( $L_{a.c}(\omega''_i) < 0$ ). В дальнейшем при вычислении  $\omega_{c.a.}$  отбрасываются звенья, начиная с которых  $K_{a.c}(\omega) < 1$ .

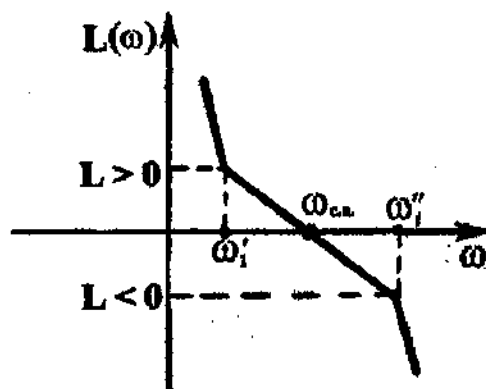


Рис. 3.11. Частота среза и прилегающие к ней опорные частоты

**Пример 3.3.** Найти  $\omega_{с.а}$ , если:

$$K(p) = \frac{1 \left( + \frac{p}{4} \right) \left( + \frac{p}{40} \right) \left( + \frac{p}{100} \right)^2}{\left( 1 + \frac{p}{0,6} \right) \left( 1 + \frac{p}{2} \right) \left( 1 + \frac{p}{10} + \frac{p}{300} \right)^2}.$$

**Решение.**

$$1. K_{ac}(300) = \frac{100 \left( \frac{300}{4} \right)^3 \frac{300}{40} \left( \frac{300}{100} \right)^2}{\frac{300}{0,6} \left( \frac{300}{2} \right)^2 \frac{300}{10}} < 1;$$

$$2. K_{ac}(100) = \frac{100 \left( \frac{100}{4} \right)^3 \frac{100}{40}}{\frac{100}{0,6} \left( \frac{100}{2} \right)^2 \frac{100}{10}} < 1;$$

$$3. K_{ac}(40) = \frac{100 \left( \frac{40}{4} \right)^3}{\frac{40}{0,6} \left( \frac{40}{2} \right)^2 \frac{40}{10}} < 1;$$

$$4. K_{ac}(10) = \frac{100 \left( \frac{10}{4} \right)^3}{\frac{10}{0,6} \left( \frac{10}{2} \right)^2} > 1.$$

Таким образом,  $\omega_{с.а}$  находится между опорными частотами  $\omega_i' = 10 \text{ с}^{-1}$  и  $\omega_i'' = 40 \text{ с}^{-1}$ .

$$\text{Тогда } 1 = \frac{100 \left( \frac{\omega_{с.а}}{4} \right)^3}{\frac{\omega_{с.а}}{0,6} \left( \frac{\omega_{с.а}}{2} \right)^2 \frac{\omega_{с.а}}{10}}; \quad \omega_{с.а} = 37,5 \text{ с}^{-1}.$$

#### 4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ, НЕКОТОРЫЕ ПОЯСНЕНИЯ

Все необходимые вопросы для построения частотных, фазовых, амплитудно-частотных и фазовых характеристик, а также методику построения логарифмических характеристик САУ мы рассмотрели в настоящей работе. Более подробные и углубленные знания по организации (построению), регулированию САУ, построению их всевозможных характеристик, определению устойчивости САУ можно получить, изучив (или ознакомившись

с работами авторов, указанных в библиографии в конце настоящей работы.

Существуют классические методы определения устойчивости САУ по критериям Гурвица, Рауса, Михайлова, Найквиста и др., материалы которых можно отыскать в любом учебнике по "Теории автоматического регулирования и управления".

А задачей настоящей работы ставилось облегчить студентам задачу в выполнении расчетно-графической работы по дисциплине "Основы автоматического управления и АСУ комплексами средств летательных аппаратов", показать на конкретных примерах методики построения АФХ, АЧХ, ЛАХ и др.

#### **4.1. Состав расчетно-графической работы (РГР)**

Расчетно-графическая работа состоит из одного отчета (пояснительной записки), где все расчеты и графики оформляются по тексту. Это коллективный труд трех (не более) студентов, которым выдается элемент САУ (или звено САУ) с уравнением его передаточной функции, либо элемент САУ в виде дифференциального уравнения, на основании которого (после решения уравнения) выполняется работа по построению всех видов характеристик - графиков. При построении логарифмических характеристик по номограммам придется исследовать поведение элементов САУ. Номограммы по САУ можно найти в учебниках "Теория автоматического управления" современных авторов, которые посвятили свои работы САУ летательных аппаратов или других объектов ответственного машиностроения.

Работа состоит из краткого введения, постановки вопроса, расчетов дифференциального уравнения, построения графиков, заключения и списка первоисточников, но не более 20-25 листов текста с рисунками и таблицами.

**Засчитывается** работа в том случае, когда студент подробно объяснит (каждый из трех) порядок ее выполнения и ответит на вопросы из лекций. Наличие собственных лекций на зачете - обязательно, это покажет прилежность студента прежде всего и его ответственность при изучении дисциплины "Основы автоматического управления и АСУ комплексами средств ЛА", в частности.

## 4.2. Контрольные вопросы

1. Что такое автоматическая система? Дайте определение.
2. Что такое автоматизированная система? Определение и отличие от автоматической системы.
3. Понятие управления и регулирования.
4. Управляющее воздействие, задающее воздействие, входные и выходные сигналы, возмущающее воздействие. Понятия и техническая интерпретация.
5. Функциональный элемент, функциональная система. Пример и определение.
6. Воспринимающий и измерительный элемент. Определение.
7. САУ с комбинированным управлением. Пример.
8. Уравнения статики и динамики. Определения.
9. Что такое линеаризация? Определение.
10. Методы линеаризации. Назовите методы, по возможности в математической интерпретации.
11. Что такое переходная функция? Назовите.
12. Импульсная, частотная (амплитудно-фазовая), передаточная функции. Что такое, объясните.
13. Динамическое звено САУ. Нарисуйте в качестве примера (прототипа).
14. Суммирующее звено САУ. То же, что в п. 13.
15. Множительное и функциональное звенья. Изобразите для примера.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975. 468 с.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1966. 308 с.
3. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы. М.: Энергия, 1981. 304 с.
4. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967. 335 с.
5. Ивашенко Н.Н. Автоматическое регулирование. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1983. 608 с.
6. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 560 с.
7. Кузовков Н.Г. Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах. М.: Оборонгиз, 1980. 448 с.
8. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1976. 256 с.
9. Попов Е.П. Теория нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 255 с.
10. Росин М.Ф., Булыгин В.С. Статическая динамика и теория эффективности систем управления. М.: Машиностроение, 1981. 312 с.
11. Современная теория систем управления / Под ред. К.Т.Леондеса. М.: Наука, 1980. 512 с.
12. Соколов Н.И. Аналитический метод синтеза линеаризованных систем автоматического регулирования. М.: Машиностроение, 1966. 328 с.
13. Теория автоматического управления / А.В.Нетушил, А.В.Балтрушевич, В.В.Бурляев и др.; под ред. А.В.Нетушила. М.: Высшая школа, 1983. 432 с.
14. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. М.: Наука, 1977. 270 с.
15. Основы теории автоматического управления / В.С.Булыгин, Ю.С.Гришанин, Н.Б.Судзиловский и др.; под ред. Н.Б.Судзиловского. М.: Машиностроение, 1985. 512 с.
16. Проектирование систем автоматизации технологических процессов: Справочное пособие / А.С.Клюев, Б.В.Глазов, и др.; под ред. А.С.Клюева. 2-е изд., перераб.и доп. М.: Энергоатомиздат, 1990. 764 с.
17. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1973. 528 с.
18. Справочное пособие по теории систем автоматического регулирования и управления/Под общ. ред. Е.А.Санковского. Л.: Высшая школа, 1973. 416 с.